Aix Marseille

N° d'ordre C.N.R.S. 6717

UNIVERSITE DE PROVENCE

Centre de Saint-Jérôme

APPLICATIONS DE LA THEORIE CINETIQUE DES GAZ A LA PHYSIQUE DES PLASMAS ET A LA DYNAMIQUE DES GALAXIES

THESE

présentée pour obtenir le grade

de

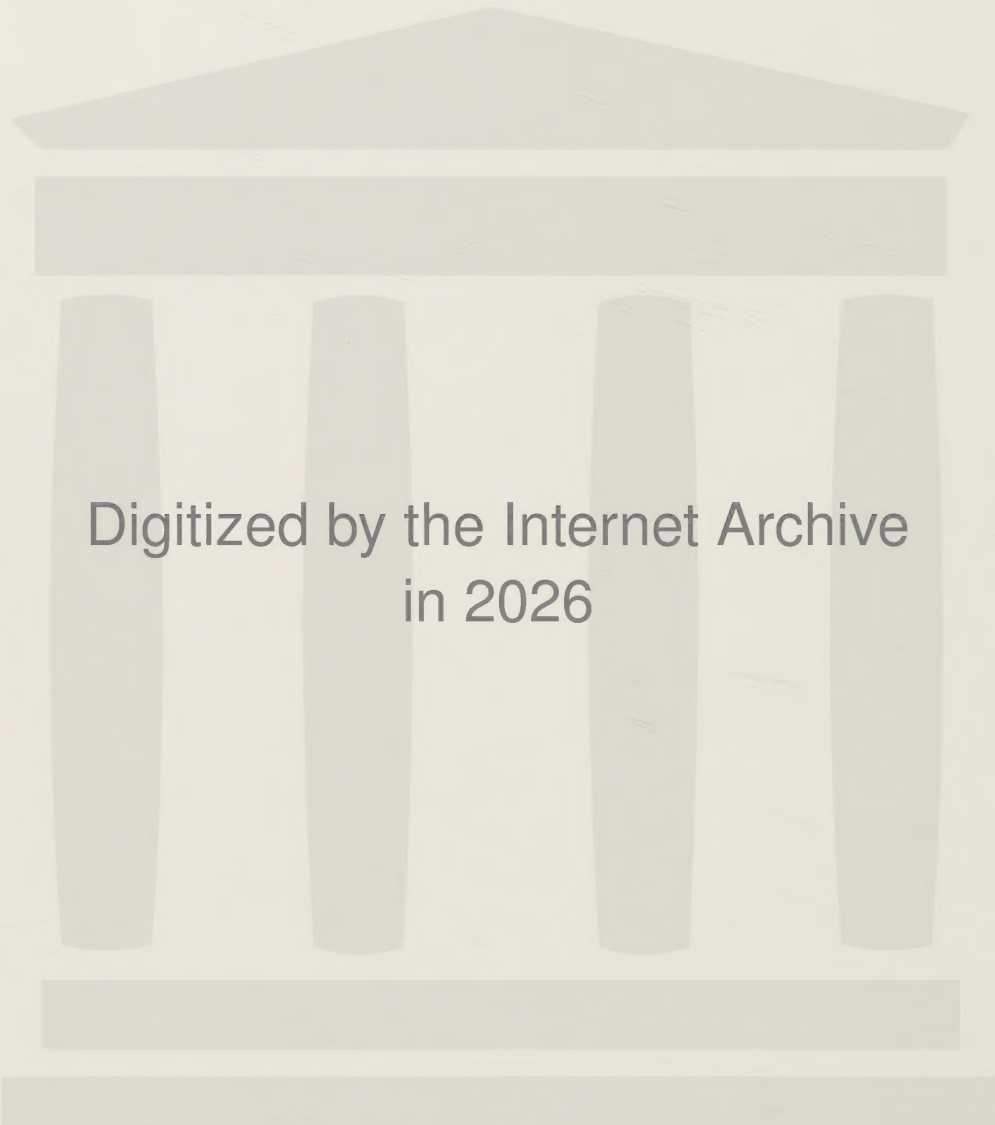
DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

J. P. PETIT

Soutenue devant la commission d'examen le 10 Mars 1972

MM.	H. GUENOCHE	Professeur	*Président*
	E. SCHATZMAN	Professeur	*Examinateurs*
	J.P. DAVID	Professeur	
	R. BRUN	Maître de Recherches	


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545827_0005

UNIVERSITE DE PROVENCE

Centre de Saint-Jérôme

APPLICATIONS DE LA THEORIE CINETIQUE DES GAZ A LA PHYSIQUE DES PLASMAS ET A LA DYNAMIQUE DES GALAXIES

THESE

présentée pour obtenir le grade

de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

J. P. PETIT

Soutenue devant la commission d'examen le 10 Mars 1972

MM.	H. GUENOCHE	Professeur	*Président*
	E. SCHATZMAN	Professeur	*Examinateurs*
	J.P. DAVID	Professeur	
	R. BRUN	Maître de Recherches	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE PROVENCE

U.E.R.Scientifiques

Président : F. BOREL

Secrétaire général : C.MOYNAULT

PROFESSEURS

MM	J.VALENSI	Mécanique expérimentale des fluides.
	P.ROUARD	Physique générale
	P.DESNUELLE	Chimie biologique
	M.MERIGOUX	Physique industrielle
	C.FEHRENBACH	Astronomie
	A.FAVRE	Mécanique de l'atmosphère et météorologie
	A.GUILLEMONAT	Chimie industrielle
	G.CARPENI	Chimie
	Y.DOUCET	Physique
	J.M.SOURIAU	Méthodes mathématiques de la physique
	J.METZGER	Chimie
	L.FOURES	Mathematiques
	D.MALE	Physique
	G.BODIOU	Mathématiques appliquées
	M.NAUDET	Chimie des corps gras
	P.BOUSQUET	Physique

P.PESTEIL	Physique
P.CASAL	Mécanique rationnelle et appliquée
G.GOUVERNET	Géologie appliquée
A.VISCONTI	Physique théorique
A.BLANCHARD	Mathématiques générales
M.DUSSARDIER	Physiologie animale
M.PERROT	Physique
P.QUEZEL	Botanique
E.GRAUSSE	Physique (Avignon)
A.JULG	Chimie théorique
S.TAXY (Mme)	Géologie historique
F.TESSIER	Géologie générale
M.L.FURNESTIN	Biologie animale
M.BERTRAND	Chimie
J.TROMPETTE	Physique
M.LAFFITTE	Chimie
R.FRAISSE	Mathématiques
C.BLANCHARD (Mme)	Mathématiques
R.NEGRE	Biologie végétale
R.COULOMB	Physique
R.KERN	Minéralogie
L.SIDERIADES	Physique
J.M.SURZUR	Chimie organique
H.CHANTREL	Physique de l'espace
J.SOUGY	Géologie
J.HERVE	Electronique
H.BODOT	Chimie
J.CHOUTEAU	Physiologie animale
R.PHILIP	Physique
L.CAPELLA	Minéralogie
P.BILLARD	Mathématiques
M.BONNEAU	Mathématiques
J.C.TRAYNARD	Chimie industrielle
C.CLARION (Mlle)	Mécanique des fluides

A.PONS	Botanique
A.GIRARDIE	Zoologie
J.C.MAIRE	Chimie
M.SIMON	Physiologie animale
J.MANDELBROJT	Physique
J.P.DAVID	Physique
M.BIZOUARD	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

R.AMAR	Zoologie
L.DEVEZE	Biologie marine
F.BOREL	Techniques mathématiques de la physique
R.CHANDEBOIS (Mlle)	Biologie animale
H.GUENOCHE	Mathématiques appliquées.
F.PECAUT	Mathématiques (Avignon)
J.HENNEGUIN	Electronique
S.QUEIRARD (Mlle)	Pétrographie
C.FEUGEAS	Chimie
J.CABANE	Chimie
G.RASIGNI	Physique
S.COMBET	Chimie
R.GARRON	Physique expérimentale
M.CADILHAC	Physique
S.WEAGELL	Chimie
G.MARCHIS-MOUREN	Chimie biologique
F.HALBWACHS	Physique (Avignon)
R.PETIT	Physique
M.HUGON	Psycho-Physiologie
M.PICHENOT (Mlle)	Biologie végétale
M.GILLET	Physique
J.P.ROGERRO	Chimie (Avignon)
L.SARDA	Botanique
C.ROMAN	Physiologie animale
A.GILLET	Mathématiques
S.MARTINUZZI	Physique

MAITRES DE CONFERENCES

H.PATIN	Chimie
J.CRESP	Biologie animale
M.BENNAROCHE	Physique
H.TACHOIRE	Chimie
E.VINCENT	Chimie
L.VICENTE	Biologie animale
J.MANUCEAU	Mathématiques
R.GUERMEUR	Physique
M.DELAAGE	Biochimie
F.CATZIGRAS (Mlle)	Géologie
M.SIRUGUE (Mme)	Physique
H.NERDY	Physique
L.PUJOL	Chimie
A.LAVAGNE	Biologie végétale
J.GIUDICELLI	Biologie animale
M.FOUGEREAU	Biochimie
G.NOAT	Physiologie végétale
RBOUDET	Mathématiques
R.STREIFF	Chimie
J.P.BELAÏCH	Microbiologie
P.NEVILLE	Biologie végétale
J.P.SOUBLIN	Mathématiques
S.DELACHE (Mme)	Mathématiques
G.FARDOUX	Chargé d'enseignement (Maths)
B.MORIN	" " "
B.BALLET	" " " (Avignon)

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

LISTE DES PUBLICATIONS :

Physique des plasmas :

1) " Calcul des coefficients de transport d'un plasma non-Lorentzien ".Journal de Mécanique,Juin 1972.

2) " Phénomène de transport dans un plasma non-Lorentzien " Communication au Colloque de Physique d'Evian (1971).

3) " Transport phenomena in a partially ionized gas " Communication au 3°Colloque Soviétique sur la physique des plasmas,Moscou 1971.

Astrophysique Théorique :

4)"Théorie de l'instabilité gravitationnelle." Note aux CRAS présentée par A.Lichnérowicz, Janvier 1972.

5)"Théorie de l'instabilité gravitationnelle,analyse non-linéaire, Note aux CRAS,présentée par A.Lichnérowicz,Février 1972.

6)"Modèle tridimensionnel et instationnaire de système stellaire auto-gravitant,application aux galaxies et aux amas globulaires" Note aux CRAS présentée par A.Lichnérowicz,8 Décembre 1971.

7) Projet de publication adressée à Astronomy and Astrophysics même titre.

8)"Théorie de la structure spirale des galaxies ".Note aux CRAS présentée par A.Lichnérowicz,14 Juin 1971,t.272 p.1389-1392.

9)"Théorie de la structure spirale des galaxies".Projet de publication adressé à "Astronomy and Astrophysics".

Magnétohydrodynamique :

10) "Caractéristiques électriques d'un générateur linéaire de Faraday utilisant comme fluide de conversion un mélange binaire de gaz rares,avec ionisation hors d'équilibre. J.P.PETIT,J.VALENSI,D.DUFRESNES,J.P.CARESSA. C.R. Acad. Sc. Paris t.268 pp.245-247 (27 Janvier 1969).

11) "Performances théoriques d'un générateur du type de Faraday avec ionisation hors d'équilibre". CRAS Paris t.268 pp.835-838 du 14 Avril 1969.

12)"Instabilité de régime dans un générateur de Hall avec ionisation hors d'équilibre".CRAS Paris t.268 pp.906-909 du 21 Avril 1969.

13)"Caractéristiques électriques d'un convertisseur magnéto-hydrodynamique utilisant comme fluide de conversion un mélange binaire de gaz rares,avec ionisation hors d'équilibre." Communication au Colloque International de Varsovie,sur la production d'électricité par voie MHD. 1967.

14)"Taux de croissance de l'instabilité électrothermique et paramètre de Hall critique dans les générateurs MHD à cycle fermé lorsque la mobilité électronique est variable." J.P.PETIT,J.VALENSI. CRAS Paris t.269 pp.365-367. (1° Sept 1969).

-:-

" Aux gens honnêtes ..."

" a Nana ... "

INTRODUCTION :

Des problèmes aussi différents que la dynamique stellaire ou les mécanismes de transport dans les plasmas peuvent être abordés, d'un point de vue théorique,à l'aide du formalisme de l'équation de Maxwell-Boltzmann.On sait en effet que les densités stellaires et interstellaires permettent d'assimiler le milieu galactique à un gaz.Ainsi,de même qu'un gaz ionisé peut être considéré comme un mélange d'ions,d'électrons et d'atomes neutres,une galaxie peut être assimilée à un mélange de diverses espèces d'étoiles et de gaz interstellaire.La dynamique de celui-ci est cependant particulière : le système stellaire par exemple,à l'échelle de temps des phénomènes envisagés,se comporte comme un ensemble pratiquement non-collisionnel.

Donc,suivant le type de problème considéré,l'équation de Boltzmann sera particularisée pour tenir compte des mécanismes caractérisant le milieu étudié.

Avant d'exposer le détail des travaux contenus dans ce mémoire il parait nécéssaire de situer chronologiquement les différentes etapes de leur réalisation.

Initialement l'auteur s'était attaché à résoudre un problème très particulier concernant le fonctionnement des générateurs MHD, ce dont il sera question au chapitre V .Au cours de cette étude il est apparu que les phénomènes de transport dans les plasmas partiellement ionisés,qui interviennent précisément dans ces générateurs, demandaient à être éclaircis.L'auteur a donc été amené à développer une théorie de ces phénomènes (voir chapitre I),dont le point de départ est l'équation de Boltzmann.

A la suite de cette étude,et de contacts scientifiques avec l'équipe de recherche de l'Observatoire de Mraseille spécialisée dans l'étude des galaxies (Service d'interférométrie de l'Observatoire de Marseille : MM. Courtès,Monnet,Boulesteix,Georgelin et Louise) il lui sembla intéressant de tenter de mettre à profit les connaissances acquises en théorie cinétique des gaz à l'étude de la dynamique galactique.

Bénéficiant de la grande expérience acquise par cette équipe depuis des années dans le domaine et travaillant en contact étroit l'auteur développa des modèles théoriques en tentant de rendre compte des données d'observation,en général qualitativement.

Le présent mémoire s'articule en cinq chapitres :

1 Dans le premier les paramètres de trabsport d'un plasma non-Lorentzien (partiellement ionisé) sont calculés à partir de l'équation de Boltzmann,d'abord par une méthode paramétrique où la fonction de distribution de la vitesse électronique se trouve développée en puissance du rapport $\frac{\nu_{ee}}{\nu_{es}}$ des fréquances de collision électron-électrons et électron-lourds,puis à l'aide d'une méthode utilisant le formalisme de Bhatnagar,Gross et Krook.Des solutions analytiques sont obtenues, qui apportent une simplification par rapport à la méthode classique de Chapman-Enskog utilisée par Devoto (Réf. [3] du Ch. I).L'extension du calcul est effectuée au domaine hors d'équilibre ($T_e > T_g$),ce qui implique une redéfinition de la distance de Debye.L'application numérique est effectuée dans le cas du plasma complètement ionisé et de l'Argon partiellement ionisé.Pour les deux théories l'accord avec les résultats de Spitzer et Härm est bon (Réf. [2] du Ch. I).Le second modèle fournit des résultats très proches de ceux de Devoto.

2 Le chapitre deux est consacré à l'étude de l'instabilité gravitationnelle en milieu maxwellien.Dans une analyse linéarisée l'équation de Jeans se trouve réétablie,à travers les concepts de la théorie cinétique.On montre comment la loi de Hubble se trouve associée à ce phénomène.L'extension de ce travail dans une perspective cosmologique est évoquée (évaluation du "diamètre" de l'Univers à $4{,}94\ 10^{10}$ années-lumière).

3 Dans le chapitre trois se trouve abordé le problème de la dynamique stellaire.En introduisant une solution de Schwarschild (Elliptique) particulière dans l'équation de Vlasov un modèle tridimensionnel de système stellaire auto-gravitant est obtenu.Dans l'application aux galaxies les courbes de rotation obtenues s'accordent de façon satisfaisante avec les résultats d'observation.

En particulier,dans l'application à la Galaxie,le modèle prévoit un mouvement de Brandt.L'intérêt du modèle est aussi sa cohérence tridimensionnelle : la vitesse tend vers zéro lorsqu'on s'éloigne perpendiculairement au plan galactique.

Lorsqu'on donne à ce modèle la symétrie sphérique les équations très simples obtenues semblent pouvoir décrire le comportement spatio-temporel,non-linéaire,d'un amas globulaire ou d'une galaxie sphérique.

4 Dans le chapitre quatre est analysé le comportement du milieu interstellaire vis à vis de l'instabilité gravitationnelle.

Se basant sur des calculs effectués par Spitzer (Réf. [1] du Ch. IV) l'auteur pose que la milieu interstellaire est sous la dépendance de l'action des supernovae et des étoiles jeunes,censées entretenir la balance d'énergie et l'isotropie du milieu.Dans cette optique le rôle des collisions entre nuages de matière interstellaire devient minime.Le gaz se révèle sensible à l'instabilité gravitationnelle et l'étude (linéarisée) détaillée fait apparaitre des tructures spirales en bon accord qualitatif avec l'observation.Dans cette optique la structure des galaxies barrées et des galaxies anneau et du type Φ se trouve expliquée.

5 Dans le chapitre cinq,après un bref rappel des problèmes que pose la conversion MHD hors d'équilibre,l'auteur analyse les performances théoriques des générateurs de Hall et de Faraday en mettant en lumière quelques aspects particuliers qui s'y rattachent : conditions d'amorçage,instabilité de régime.La seconde partie traite de l'instabilité électrothermique.Le calcul du paramètre de Hall critique et du taux de croissance de l'instabilité est étendu au domaine des plasmas partiellement ionisés,de manière simple.La faisabilité de la conversion en cycle fermé est discutée enfin et des solutions pratiques proposées.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Chapitre 1

CONTRIBUTION A LA THEORIE CINETIQUE
DES MILIEUX COLLISIONNELS :

CALCUL DES PARAMETRES DE TRANSPORT
D'UN PLASMA NON-LORENTZIEN.

I.I) RESUME :

Les phénomènes de conduction et de diffusion dans un plasma en régime de collisions binaires peuvent s'analyser à partir de l' équation de Boltzmann attachée au gaz d'électrons.Dans cette équation sont présents des termes intégraux J_{ei} , J_{ee} , J_{en} , rendant compte respectivement des collisions électron-ions,électron-électrons et électron-neutres.La présence du terme J_{ee} rend l'intégration délicate.La solution dite " de Lorentz " traite du cas où celui-ci peut être négligé au profit des deux autres.Plusieurs tentatives ont été faites pour donner une solution complète du problème.En 1953 Spitzer et Härm [2] ont pu fournir les coefficients de transport d'un plasma totalement ionisé (Coulombien) en utilisant le formalisme de Fokker-Planck.Celui-ci étant spécifique de l'interaction à longue distance (long range encounters) l'étude ne pouvait être étendue aux plasmas partiellement ionisés.Plus récemment Devoto [3] a calculé les coefficients de transport de l'Argon partiellement ionisé en utilisant une méthode de Chapman-Enskog modifiée.Enfin Chmielski et Ferziger [4] ont,la même année,effectué l'extension du calcul à une situation de non équilibre ($T_e > T_g$).

Deux méthodes sont présentées ici : La première dérive de la méthode de Chapman-Enskog mais en diffère par le fait qu'elle s'appuie sur un système résolvant itératif différent : l'effet des collisions mutuelles entre électrons y est considéré comme une perturbation apportée au mécanisme de transport Lorentzien.Il n'est plus nécéssaire comme on le verra plus loin de développer les fonctions inconnues en polynômes de Sonine.

Les coefficients de transport non-Lorentziens peuvent être explicités en termes d'intégrales universelles du type de Chapman et Cowling, qui sont calculées numériquement et tabulées,le résultat étant fourni sous forme d'abaques.L'application numérique effectuée dans le cas du plasma totalement ionisé montre un bon accord avec les résultats de Spitzer et Härm.

La seconde méthode s'appuie sur l'opérateur de Bhatnagar,Gross et Krook.Elle conduit à un résultat extrêmement simple dans le cas de la conductivité électrique,qui recoupe à la fois le travail de Spitzer et Härm et (dans le cas de l'Argon) celui de Devoto.Dans les deux cas l'extension est effectuée à une situation de non-équilibre ($T_e > T_g$) et la distance de Debye est recalculée en conséquence.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

I.II) GENERALITES SUR LES SYSTEMES RESOLVANTS ITERATIFS

PRINCIPE ET ORIGINALITE DE LA METHODE :

Le problème de la détermination des coefficients de transport d'un plasma de degré d'ionisation quelconque, en régime de collisions binaires, peut se ramener à la résolution simultanée d'un système d'équations de BOLTZMANN comportant autant d'équations que d'espèces présentes. Si les causes de non-équilibre (gradients des paramètres macroscopiques et champ électrique) ne sont pas trop élevées les fonctions de distribution des espèces lourdes peuvent être assimilées à des fonctions maxwelliennes. Il reste donc à déterminer f_2, fonction de distribution de la vitesse électronique, obéissant à l'équation de BOLTZMANN (✳) :

$$\xi_2(f_2) = \partial_2 f_2 + J_2(f_2 f) + \sum_{s \neq 2} J_{2s}(f_2 f_s) = 0 \qquad (1)$$

avec :

$$\begin{cases} J_2(f_2 f) = \iint \left(f_2 f - f_2' f' \right) k_2 \, dk \, d\vec{C} & (2) \\ J_{2s}(f_2 f_s) = \iint \left(f_2 f_s - f_2' f_s' \right) k_{2s} \, dk \, d\vec{C}_s & (3) \end{cases}$$

(✳) On trouvera à la fin du mémoire une description des notations utilisées. Le formalisme est en général celui de l'ouvrage de CHAPMAN et COWLING (voir référence [1]).

Une des difficultés provient du fait que la fonction de distribution inconnue figure de façon bilinéaire dans l'intégrale de collision (2).La méthode classique,due à D.ENSKOG,consiste à développer la fonction inconnue autour d'un état $f_2^{(0)}$, les termes successifs $f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, \dots, f_2^{(r)}$ étant alors considérés comme perturbateurs.Ceux-ci sont choisis par ailleurs de manière à générer des moments nuls :

$$\int \psi^{(i)} f_2^{(r)} \, d\vec{C}_2 = 0 \qquad (r \neq 0) \qquad (4)$$

$\psi^{(i)}$ étant les invariants collisionnels $1, \vec{c}, c^2$

L'équation (1) est d'abord écrite en termes de vitesse d'agitation (vitesse relative de l'espèce 2 par rapport au mouvement de l'ensemble) :

$$\mathcal{D}_2 f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial t} + \vec{c}_2 \cdot \frac{\vec{\partial} f_2}{\partial r} + \vec{c}_0 \cdot \frac{\vec{\partial} f_2}{\partial r} + \left(\vec{F} - \frac{D\vec{c}_0}{Dt} \right) \cdot \frac{\vec{\partial} f_2}{\partial c}$$

$$- \frac{\overrightarrow{\partial f_2}}{\partial c_2} c_2 : \frac{\overrightarrow{\partial c_0}}{\partial r} = \frac{\partial_e f_2}{\partial t} \qquad (4')$$

Enskog exprime alors le premier membre de l'équation en introduisant les équations de conservation (voir référence [1] ,8.21 page 138).

Dans le terme $\mathcal{D}_2 f_2$ apparait alors le tenseur de pression $\vec{\vec{p}}_2$ et le vecteur flux de chaleur $\vec{q}_2$ associés au gaz d'électrons. A travers ces termes on voit que l'opérateur $\mathcal{D}_2$ se trouve dépendre de la solution complète f_2 .Pour tourner cette difficulté

ENSKOG linéarise l'opérateur lui-même,ce qui permet du même coup l'élimination de la variable temps.On aboutit ainsi à une expression du type :

$$\mathcal{E}_2(f_2) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{E}_2^{(r)}\left(f_2^{(0)}, f_2^{(1)}, \dots, f_2^{(r)}\right) = 0 \qquad (5)$$

Enskog substitue alors à cette équation le type général de système résolvant itératif ci-après :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_2^{(0)}\left(f_2^{(0)}\right) = 0 \\ \mathcal{E}_2^{(1)}\left(f_2^{(0)}, f_2^{(1)}\right) = 0 \\ \quad " \qquad " \qquad " \\ \mathcal{E}_2^{(r)}\left(f_2^{(0)}, f_2^{(1)}, \dots, f_2^{(r)}\right) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

L'existence de la solution se trouvant assurée par la condition d' orthogonalité :

$$\int \psi^{(i)} \mathcal{E}_2^{(r)} \, d\vec{C}_2 = 0 \qquad (7)$$

les fonctions $\psi^{(i)}$ étant $1, \vec{C}_2, C_2^2$

Ecrivons maintenant les expressions suivantes,correspondant au mode de linéarisation d'Enskog :

(Ce sont les expressions 8.2....6,8.2....7 et 8.2....8 de [1] .)

On peut composer à partir de ceux-ci plusieurs systèmes résolvants itératifs suivant les ordres de grandeur admis ou supposés pour les différents processus ([1] p 107 ligne 24).Le système d'Enskog est un de ceux-ci.Ecrivons-le :

$$\begin{cases} \xi_2^{(0)} = \mathcal{D}_2^{(0)} + J_{22}^{(0)} + \sum_{s\neq 2} J_{2s}^{(0)} = 0 \\ \xi_2^{(1)} = \mathcal{D}_2^{(1)} + J_{22}^{(1)} + \sum_{s\neq 2} J_{2s}^{(1)} = 0 \\ \quad " \qquad\qquad " \qquad\qquad " \\ \xi_2^{(r)} = \mathcal{D}_2^{(r)} + J_{22}^{(r)} + \sum_{s\neq 2} J_{2s}^{(r)} = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Enskog pose que $\mathcal{D}_2^{(0)} = 0$ Cette condition entraine aussitôt que $f_2^{(0)}$ est maxwellienne.Cette solution,réinjectée dans $\mathcal{D}_2^{(1)}$ permet le calcul de la solution d'ordre deux $f_2^{(1)}$,et ainsi de suite.

La solution de CHAPMAN-ENSKOG se construit ainsi de proche en proche.Dans [1] les auteurs ne fournissent guère de précisions sur la méthode paramétrique supportant l'ensemble.Citons : " the problem of a gas mixture is solved in a manner analogous to that employed for a simple gas " ([1] Ch.8 p 134).

Quoi qu'il en soit il est clair dans (10) qu'une importance égale est attribuée aux termes rendant compte des collisions électroniques mutuelles et électron-lourds,ce qui se traduit par la présence au même ordre de $f_2^{(r)}$ dans $J_{22}^{(r)}$ et $J_{2s}^{(r)}$.

Nous n'insisterons pas plus avant sur les modalités pratiques de la résolution du système (10), basées sur le développement en polynômes de Sonine de la fonction inconnue (voir référence [1]). L'application de la méthode de Chapman-Enskog au calcul des coefficients de transport de l'Argon constitue l'essentiel du travail de Devoto [3] .R.M.Chmielski et J.H.Ferziger ont repris ce formalisme en justifiant à chaque étape l'application du modèle à une situation de non-équilibre ($T_e > T_g$).Bien que cette extension ait constitué une nécessité imposée par les faits on notera que cet aménagement de la théorie n'entraine que des variations légères du formalisme établi par Chapman et Enskog.

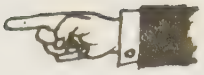
Les résultats fournis par cette méthode sont considérés comme utilisables lorsque le plasma reste en régime de collisions binaires. Pour de plus forts taux d'ionisation le diamètre des sphères de Debye cesse d'être négligeable devant le libre pardours électronique et il est alors nécéssaire de recourir au formalisme de Fokker-Planck. De ce formalisme est issu le travail bien connu de Spitzer et Härm [2] .Il est agréable de constater que le raccord des deux théories se fait très bien.

De la même manière la solution de seconde approximation issue de (10) s'identifie avec la solution Lorentzienne ($J_{22} \ll J_{21}$) pour les faibles degrés d'ionisation (weakly ionized plasma).

Hélas si les expressions analytiques du modèle Lorentzien et du modèle de Spitzer et Härm sont relativement simples on sait bien que le modèle de Chapman-Enskog ne conduit pas à un résultat analytique simple.En ce sens les travaux de Devoto et de Chmielski n'échappent pas à la règle.

Dans le présent travail nous avons cherché à construire une solution analytique.Il nous a fallu pour ce faire nous écarter dès le départ de la méthode de Chapman-Enskog,en faisant recours à un système résolvant itératif différent.

PRINCIPE ET ORIGINALITE DE LA METHODE PROPOSEE :



Si nous considérons maintenant les collisions mutuelles entre électrons comme un mécanisme perturbateur vis à vis des collisions électron-lourds nous sommes amenés à écrire le nouveau système résolvant itératif suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_2^{(0)} + \sum_{s\neq 2} J_{2s}^{(0)} = 0 \\ \mathcal{D}_2^{(1)} + J_{22}^{(0)} + \sum_{s\neq 2} J_{2s}^{(1)} = 0 \\ \mathcal{D}_2^{(2)} + J_{22}^{(1)} + \sum_{s\neq 2} J_{2s}^{(2)} = 0 \\ \mathcal{D}_2^{(r)} + J_{22}^{(r-1)} + \sum_{s\neq 2} J_{2s}^{(r)} = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Comme dans la méthode d'Enskog l'existence de la solution est assurée par :

$$\int \mathcal{D}_2^{(r)} \psi^{(i)} d\vec{C}_2 = 0 \quad ; \quad \int J_2^{(r)} \psi^{(i)} d\vec{C}_2 = 0 \qquad (12)$$

On peut alors s'interroger sur la validité d'une telle approche.

METHODE PARAMETRIQUE :

Pour que le système (11) puisse représenter la solution f_2 il est nécéssaire que les termes successifs du développement décroissent suffisement vite.Ce qui suggère la définition d'ordres de grandeur par l'introduction d'un ou de plusieurs petits paramètres.

Il s'agit en fait d'une justification à postériori.Comme on le verra par la suite les termes successifs du développement associés à (11) correspondent aux ordres de grandeur ci-après :

$$\begin{cases} f_2^{(0)} \sim n_2 F_2^{(0)} \\ f_2^{(1)} \sim n_2 E \frac{1}{\nu_{21}} F_2^{(1)} \\ f_2^{(2)} \sim n_2 E \frac{\nu_{22}}{(\nu_{21})^2} F_2^{(2)} \\ f_2^{(3)} \sim n_2 E \frac{(\nu_{22})^2}{(\nu_{21})^3} F_2^{(3)} \\ \text{etc...} \end{cases} \qquad (13)$$

$F_2^{(0)}, F_2^{(1)}, F_2^{(3)}, \ldots$ étant d'ordres de grandeur comparables.

E figurant la cause de non-équilibre (champ électrique par exemple).

Ceci suggère l'introduction de deux paramètres :

$$\mu = \frac{1}{\nu_{2s}} \quad ; \quad \theta = \frac{\nu_{22}}{\nu_{2s}} \qquad (14)$$

Ainsi :

$$\begin{cases} f_2^{(0)} \sim \frac{1}{\mu} H_2^{(0)} \\ f_2^{(1)} \sim H_2^{(1)} \\ f_2^{(2)} \sim \theta H_2^{(2)} \\ f_2^{(3)} \sim \theta^2 H_2^{(3)} \\ \text{etc...} \end{cases} \qquad (15)$$

Nous savons que $\theta < 1$ dans tous les cas. En régime collisionnel $\nu_{2s} \gg 1$ donc μ est petit. $f_2^{(0)}$ représentera donc bien la solution de première approximation.

Si $\theta \ll 1$ c'est à dire si $\nu_{22} \ll \nu_{2s}$ alors $f_2^{(1)}$ représentera l'approximation d'ordre deux, Lorentzienne par ailleurs. La décroissance des termes successifs étant d'autant plus rapide que θ est faible.

Un tel type de développement apparait donc comme étant en puissances des fréquences de collision ν_{22} et ν_{2s} .

Evaluons maintenant les ordre de grandeur des éléments

$$\mathcal{D}^{(r)} \; , \; J_{22}^{(r)} \; , \; J_{2s}^{(r)}$$

$J_{22}^{(0)} \sim n_2 \nu_{22}$	$J_{2s}^{(0)} \sim n_2 \nu_{2s}$
$J_{22}^{(1)} \sim n_2 \frac{\nu_{22}}{\nu_{2s}} E$	$J_{2s}^{(1)} \sim n_2 E$
$J_{22}^{(2)} \sim n_2 \left(\frac{\nu_{22}}{\nu_{2s}}\right)^2 E$	$J_{2s}^{(2)} \sim n_2 \left(\frac{\nu_{22}}{\nu_{2s}}\right) E$

etc ...

On voit se justifier l'écriture des seconds membres du système (11). L'examen des termes $\mathcal{D}_2^{(r)}$ est plus délicate.

$\mathcal{D}_2^{(1)} \sim n_2 E$ se trouve être effectivement de l'ordre de $J_{2s}^{(1)}$

Avec $E < 1$ et $\nu_{22} \gg 1$ il est clair que $\left(\mathcal{D}_2^{(0)} \sim E^2 . n_2 \frac{1}{\nu_{2s}}\right) \ll J_{22}^{(1)}$ et $J_{2s}^{(2)}$

Il est plus difficile de situer la place successive des termes $\mathcal{D}_2^{(3)}$ (16) et suivants à cause de la multiplicité des paramètres présents.

Pour des degrés d'ionisation suffisement faibles on sait que: $\frac{\nu_{22}}{\nu_{2s}} \ll 1$ (plasma faiblement ionisé).Lorsque le plasma est " totalement ionisé " on a :

$$\nu_{22} \simeq 0,7\ \nu_{2s} \qquad (17)$$

Est-il possible de traiter les collisions mutuelles entre électrons comme un mécanisme perturbateur ?

Contre toute attente il apparait,comme on le verra plus loin,que les paramètres de transport calculés par cette méthode et ceux obtenus par Spitzer et Härm diffèrent peu (bien que l'accord soit cependant moins bon qu'avec les résultats de Devoto,Chmielski et Ferziger),ce qui permet d'effectuer le raccord souhaité.

Revenons au système (11).La solution de première approximation est maxwellienne.Celle de seconde approximation se confond avec la solution Lorentzienne.

Les termes intégraux $J_{22}^{(r)}$ dans les équations se comportent alors comme des fonctions connues,ce qui résoud le problème de la bilinéarité (et permettra l'obtention d'une solution analytique).

Le but de la présente étude est de mener à bien le calcul de l' approximation d'ordre trois $f_2^{(2)}$ et d'en déduire les paramètres de transport non-Lorentziens.

I.III) CALCUL DE LA SOLUTION $f_2^{(2)}$

I.III.1) BREF RAPPEL DE LA SOLUTION LORENTZIENNE $f_2^{(1)}$

En posant : $$f_2^{(r)} = f_2^{(0)} \phi_2^{(r)} \qquad (18)$$

L'équation d'ordre deux s'écrit :

(Voir référence 1 8.3...(1),(2),(8), p.139 et 140.)

$$f_2^{(0)} \left\{ \left(\frac{m_2 c_2^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \left(\vec{c}_2 \cdot \frac{\vec{\partial \log T}}{\partial r} \right) + \frac{n}{n_2} \left(\vec{d}_{2s} \cdot \vec{c}_2 \right) \right.$$

$$\left. + \frac{m_2}{kT} \overrightarrow{\overrightarrow{c_2 c_2}} : \frac{\vec{\partial v}}{\partial r} \right\} = - \sum_{s \neq 2} n_2 n_s I_{2s} \left(\phi_2^{(1)} \right) \qquad (19)$$

$\Phi_2^{(1)}$ figure de façon linéaire dans cette équation. Posons :

$$\vec{G}^* = \left(\frac{m_2 c_2^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \frac{\overrightarrow{\partial \log T}}{\partial r} + \frac{n}{n_2} \vec{d}_{21} = \vec{F} c_2^2 + \vec{H} \qquad (20)$$

Il vient :

$$f_2^{(0)} \left\{ \left(\vec{G}^* . \vec{c}_2 \right) + \frac{m_2}{kT} \overrightarrow{\overrightarrow{c_2 c_2}^{\,o}} : \frac{\overrightarrow{\partial C_0}}{\partial r} \right\}$$

$$= - \sum_{s \neq 2} n_2 n_s I_{21} \left(\Phi_2^{(1)} \right) \qquad (21)$$

La solution $\Phi_2^{(1)}$ de cette équation linéaire est la somme de la solution générale de l'équation homogène plus une solution particulière de l'équation complète. La solution générale de l'équation **homogène est :**

$$\alpha_2^{(1)} + \vec{\alpha}_2^{(2)} . \vec{c}_2 + \alpha_2^{(3)} \frac{1}{2} m_2 c_2^2 \qquad (22)$$

où l'on reconnait une combinaison linéaire des trois invariants collisionnels ([1] p.137).

La solution particulière de l'équation complète est :

$$- \left(\vec{G}^* . \vec{c}_2 \right) \varphi_2^{(1)}(c_2) - \frac{m_2}{kT} \left(\overrightarrow{\overrightarrow{c_2 c_2}^{\,o}} : \frac{\overrightarrow{\partial C_0}}{\partial r} \right) B_2^{(1)}(c_2)$$

$\varphi_2^{(1)}(c_2)$ et $B_2^{(1)}(c_2)$ étant des fonctions du module c_2 de la vitesse $\vec{c}_2$

L'hypothèse (4) de la page 4 entraine que :

$$\alpha_2^{(1)} = \vec{\alpha}_2^{(2)} = \alpha_2^{(3)} = 0 \qquad (24)$$

Par ailleurs dans une collision électron-lourds le rapport des masses fait que $\vec{C}_2$ varie peu en module et que la vitesse des particules lourdes est statistiquement faible devant celle des électrons, c'est à dire :

$$\begin{cases} C_2' \simeq C_2 \\ \vec{g}_{2s} \simeq \vec{C}_2 \end{cases} \qquad (25)$$

L'équation (21) prend alors la forme :
(Voir [1] § 10.5)

$$f_2^{(0)} \left\{ \left(\vec{G}^* \cdot \vec{C}_2 \right) + \frac{m_2}{kT} \overset{\vec{o}}{\overset{\rightarrow}{C_2 C_2}} : \overset{\overset{\rightarrow}{}}{\frac{\partial G_0}{\partial r}} \right\}$$

$$= \sum_{s \neq 2} f_2^{(0)} \left[2\pi \phi_{2s}^{(1)} \left(\vec{G}^* \cdot \vec{C}_2 \right) \varphi_2^{(1)}(C_2) + 3\pi n_s \phi_{2s}^{(2)} B_2^{(1)} \frac{m_2}{kT} \overset{\vec{o}}{\overset{\rightarrow}{C_2 C_2}} : \overset{\overset{\rightarrow}{}}{\frac{\partial G_0}{\partial r}} \right]$$

(26)

$\phi_{2s}^{(1)}$ et $\phi_{2s}^{(2)}$ correspondant à la définition 9.33....(2) de [1] page 157. Ce qui conduit aussitôt à la solution Lorentzienne :

$$\varphi_2^{(1)} = \frac{f_2^{(0)}}{\sum_{s\neq 2} 2\pi n_s \phi_{2s}^{(1)}} \quad ; \quad B_2^{(1)} = \frac{f_2^{(0)}}{\sum_{s\neq 2} 3\pi n_s \phi_{2s}^{(2)}} \qquad (27)$$

On peut poser :
$$\begin{cases} \sum_{s\neq 2} 2\pi n_s \phi_{2s}^{(1)} = \nu_{2s}^{(1)} \\ \sum_{s\neq 2} 3\pi n_s \phi_{2s}^{(2)} = \nu_{2s}^{(2)} \end{cases}$$

I.III.2) <u>APPROCHE NON LORENTZIENNE (notre méthode)</u> :

L'équation d'ordre trois s'écrit :

$$\mathcal{J}_2^{(2)} + J_{22}^{(1)} + \sum_{s\neq 2} J_{2s}^{(2)} = 0 \qquad (28)$$

En vertu de (16) celle-ci se réduit à :

$$\boxed{J_{22}^{(1)} + \sum_{s\neq 2} J_{2s}^{(2)} = 0} \qquad (29)$$

Cette équation est du même type que (21) c'est à dire linéaire,et pour la même raison (22),(24),la solution est de la forme :

$$f_2^{(2)} = f_2^{(0)} \left\{ \left(\vec{G}^* . \vec{c}_2\right) \varphi_2^{(2)}(c_2) + \frac{m_2}{kT} \overrightarrow{\overrightarrow{c_2 c_2}} : \frac{\overrightarrow{\partial G_0}}{\partial z} B_2^{(2)}(c_2) \right\} \qquad (30)$$

qui est une solution particulière de l'équation complète.

Nous décomposerons cette solution en deux :

$$f_2^{(2)} = f_2^{(0)} \phi_2^{(2)} = f_{2(E\nabla)}^{(2)} + f_{2(v)}^{(2)} \qquad (31)$$

$f_{2(v)}^{(2)}$ représente la contribution du gradient de vitesse.

$f_{2(E\nabla)}^{(2)}$ celle du champ électrique et des autres gradients.

L'équation (29) s'écrit :

$$n_2 n_s I_{2s}\left(\phi_2^{(2)}\right) = - n_2^2 \; I_2\left(\phi_2^{(1)}\right) \qquad (32)$$

L'introduction de la solution (30) donne au premier membre la forme :

$$\nu_{2s}^{(1)} f_{2(E\nabla)}^{(2)} + \nu_{2s}^{(2)} f_{2(v)}^{(2)} \qquad (33)$$

d'où :

$$\begin{cases} f_{2(E\nabla)}^{(2)} = - \dfrac{n_2^2 \; I_2\left(\phi_{2(E\nabla)}^{(1)}\right)}{\nu_{2s}^{(1)}} \\ \\ f_{2(v)}^{(2)} = - \dfrac{n_2^2 \; I_2\left(\phi_{2(v)}^{(1)}\right)}{\nu_{2s}^{(2)}} \end{cases}$$

Ainsi :

$$f_2^{(2)} = \frac{n_2^2 \vec{F} \cdot I_2\left(\frac{c_2^2 \vec{c}_2}{\nu_{2s}^{(1)}}\right)}{\nu_{2s}^{(1)}} + n_2^2 \frac{\vec{H} \cdot I_2\left(\frac{\vec{c}_2}{\nu_{2s}^{(1)}}\right)}{\nu_{2s}^{(1)}}$$

$$+ \frac{n_2^2}{\nu_{2s}^{(2)}} \frac{m_2}{kT} \frac{\overrightarrow{\overrightarrow{\partial c_0}}}{\partial_2} : I_2\left(\frac{\overrightarrow{\overrightarrow{c_2 c_2}}}{\nu_{2s}^{(2)}}\right) \qquad (35)$$

Ce qui constitue la solution d'ordre trois (non-lorentzienne).

Il reste maintenant à exploiter cette solution, c'est à dire à calculer les contributions de troisième ordre des paramètres de transport :

$$\sigma_2^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \beta_2^{(2)}, K_2^{(2)}$$

Ce que nous ferons en explicitant les vecteurs densité de courant $\vec{J}_2^{(2)}$ et flux de chaleur $\vec{q}_2^{(2)}$, et le tenseur de pression $\overrightarrow{\overrightarrow{p}}_2^{(2)}$

I.IV) CALCUL DES PARAMETRES DE TRANSPORT NON-LORENTZIENS :

$$\vec{J}_2^{(2)} = -e \int f_2^{(2)} \vec{c}_2 \, d\vec{c}_2 \qquad (36)$$

$$\vec{J}_2^{(1)} = - n_2^2 e \vec{F} \cdot \int \frac{\vec{C_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} I_2 \left(\frac{C_2^2 \vec{C_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} \right) d\vec{C_2}$$

$$- n_2^2 e \vec{H} \cdot \int \frac{\vec{C_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} I_2 \left(\frac{\vec{C_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} \right) d\vec{C_2} \qquad (37)$$

En introduisant la notation [1] 4.4...(7) p. 86.

$$= - e n_2^2 \vec{F} \cdot \left[\frac{\vec{C_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} , \frac{C_2^2 \vec{C_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} \right]_2$$

$$- e n_2^2 \vec{H} \cdot \left[\frac{\vec{C_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} , \frac{\vec{C_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} \right]_2 \qquad (38)$$

Les quantités

$$\left[\frac{\vec{C_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} , \frac{C_2 \vec{C_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} \right]_2 \qquad (39)$$

et

$$\left[\frac{\vec{C_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} , \frac{\vec{C_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} \right]_2 \qquad (40)$$

sont des tenseurs .

Si l'on explicite ces intégrales on voit apparaitre :

dans (39) :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\frac{\vec{C}_2}{V_{2S}^{(1)}}\,\delta_\epsilon\left(\frac{C_2^2\,\vec{C}_2}{V_{2S}^{(1)}}\right)}}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\vec{C}_2}{V_{2S}^{(1)}}\cdot\delta_\epsilon\left(\frac{C_2^2\,\vec{C}_2}{V_{2S}^{(1)}}\right)\right]\vec{\vec{U}} + \overrightarrow{\overrightarrow{\overset{o}{\frac{\vec{C}_2}{V_{2S}^{(1)}}\,\delta_\epsilon\left(\frac{C_2^2\,\vec{C}_2}{V_{2S}^{(1)}}\right)}}} \qquad (41)$$

et dans (40) :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\left(\frac{\vec{C}_2}{V_{2S}^{(1)}}\,\delta_\epsilon\,\frac{\vec{C}_2}{V_{2S}^{(1)}}\right)}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\vec{C}_2}{V_{2S}^{(1)}}\cdot\delta_\epsilon\left(\frac{\vec{C}_2}{V_{2S}^{(1)}}\right)\right)\vec{\vec{U}}$$

$$+ \overrightarrow{\overrightarrow{\overset{o}{\frac{\vec{C}_2}{V_{2S}^{(1)}}\,\delta_\epsilon\left(\frac{\vec{C}_2}{V_{2S}^{(1)}}\right)}}} \qquad (42)$$

où δ_ϵ est l'opérateur défini par :
[1] 10.321...(4) p.175

où $\vec{\vec{U}}$ est le tenseur unitaire

et où $\overrightarrow{\overrightarrow{\overset{o}{A\,A}}}$ est un dyadique à trace nulle.

Pour des raisons évidentes de colinéarité la contribution des tenseurs à trace nulle est zéro et en posant :

$$\left[\vec{F}, \vec{G}\right]_2^* = n_2^2 \iint f_2^{(0)} f_{2(1)}^{(0)} \vec{G}_{(1)} \cdot \left(\delta_\epsilon \vec{F}\right) d\vec{C}_2 \, d\vec{C}_{2(1)} \qquad (43)$$

il vient :

$$\vec{J}_2^{(2)} = -\frac{e}{3} n_2^2 \vec{F} \left[\frac{\vec{C}_2}{V_{2s}^{(1)}}, \frac{C_2^2 \vec{C}_2}{V_{2s}^{(1)}} \right]_2^*$$

$$- \frac{e}{3} n_2^2 \vec{H} \left[\frac{\vec{C}_2}{V_{2s}^{(1)}}, \frac{\vec{C}_2}{V_{2s}^{(1)}} \right]_2^* \qquad (44)$$

De la même manière nous obtenons, pour le flux de chaleur :

$$\vec{q}_2^{(2)} = \frac{m_2}{2} \int C_2^2 \vec{C}_2 f_{2(E\nabla)}^{(2)} \, d\vec{C}_2$$

$$= -\frac{m_2}{6} n_2^2 \vec{F} \left[\frac{C_2^2 \vec{C}_2}{V_{2s}^{(1)}}, \frac{C_2^2 \vec{C}_2}{V_{2s}^{(1)}} \right]_2^*$$

$$- \frac{m_2}{6} n_2^2 \vec{H} \left[\frac{C_2^2 \vec{C}_2}{V_{2s}^{(1)}}, \frac{\vec{C}_2}{V_{2s}^{(1)}} \right]_2^* \qquad (45)$$

D'après [1] 4.4...(8) :

$$\begin{cases} [F, G]_2^* = [G, F]_2^* \\ [F, F]_2^* \geq 0 \end{cases} \qquad (46)$$

Comme le champ électrique n'apparait que dans le vecteur $\vec{H}$ d'après (44) on conclue que l'effet des collisions mutuelles entre électrons va dans le sens d'une réduction de la conductivité électrique.

Autre remarque : si l'interaction est du type maxwellien, c'est à dire si $\nu_{2s}^{(1)} = c^{te}$ donc :

$$\left[\frac{\vec{c_2}}{\nu_{2s}^{(1)}}, \frac{\vec{c_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} \right]_2^* = 0$$

Dans ce cas $\sigma_2^{(2)} = 0$ c'est à dire que la correction non-Lorentzienne de la conductivité électrique est nulle.

Posons :

$$\mathcal{J} = n_2^2 \left[\frac{\vec{c_2}}{\nu_{2s}^{(1)}}, \frac{\vec{c_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} \right]_2^* \qquad (47)$$

$$\mathcal{P} = n_2^2 \left[\frac{c_2^2 \vec{c_2}}{\nu_{2s}^{(1)}}, \frac{\vec{c_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} \right]_2^* \qquad (48)$$

$$\mathcal{Q} = n_2^2 \left[\frac{c_2^2 \vec{c_2}}{\nu_{2s}^{(1)}}, \frac{c_2^2 \vec{c_2}}{\nu_{2s}^{(1)}} \right]_2^* \qquad (49)$$

Il vient :

$$\sigma_2^{(2)} = -\frac{e^2}{3kT}\,\mathcal{J}$$

$$\alpha_2^{(2)} = -\frac{m_2}{3}\left(\frac{\mathcal{Q} m_2}{2kT} - \frac{5}{2}\mathcal{J}\right) \qquad (50)$$

$$\beta_2^{(2)} = -\frac{m_2}{6}\,\mathcal{P}$$

$$K_2^{(2)} = -\frac{m_2}{6}\,\frac{1}{T}\left(\frac{m_2}{2kT}\,\mathcal{Q} - \frac{5}{2}\,\mathcal{P}\right)$$

Passons au tenseur de pression $\overrightarrow{\overrightarrow{p}}_2^{(2)}$

$$f_{2(V)}^{(2)} = \frac{n_2^2}{\nu_{2s}^{(2)}}\,\frac{m_2}{kT}\,\overrightarrow{\overrightarrow{\frac{\partial \overrightarrow{c_0}}{\partial 2}}} : I_2\left(\frac{\overrightarrow{\overrightarrow{C_2 C_2}}}{\nu_{2s}^{(2)}}\right) \qquad (51)$$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{p}}_2^{(2)} = m_2 \int f_{2(V)}^{(2)}\,\overrightarrow{\overrightarrow{C_2 C_2}}\,d\vec{C}_2 \qquad (52)$$

nous nous limiterons au cas où $\nu_{2s}^{(2)} = c^{te}$

$$\vec{\vec{p}}_2^{(2)} = \frac{n_2^2 m_2^2}{\left(\nu_{2s}^{(2)}\right)^2 kT} \int \vec{\vec{C}}_2 \vec{C}_2 \left[\frac{\overset{o}{\vec{\vec{\partial C}}}}{\partial 2} : I_2 \left(\vec{C}_2 \vec{C}_2 \right) \right] d\vec{C}_2 \qquad (53)$$

Soit :

$$\vec{\vec{p}}_2^{(2)} = \frac{n_2^2 m_2^2}{\left(\nu_{2s}^{(2)}\right)^2 kT} \left[\vec{\vec{C}}_2 \vec{C}_2 , \frac{\overset{o}{\vec{\vec{\partial C}}}}{\partial 2} : \vec{C}_2 \vec{C}_2 \right]_2$$

Il est possible de mener à bien le calcul de cette intégrale.Ceci est donné dans l'annexe I (pour ne pas alourdir l'exposé).

Le résultat étant :

$$\mu_2^{(2)} = - \frac{n_2^2 e^4 \log \Lambda}{720 \pi^{5/2} m_2^{1/2} (kT)^{1/2} k_o^2 \sum_{s \neq 2} n_s^2 \phi^2} \qquad (54)$$

On note que cette correction joue dans le sens d'une réduction de la viscosité.Ceci ne doit pas étonner car le fait de tenir compte des collisions mutuelles électroniques rend la fonction de distribution f_2 plus proche de la maxwellienne.

Tout le calcul réside alors dans l'évaluation des intégrales $\mathcal{J}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}$
C'est un problème délicat du fait de la présence de l'opérateur δ_ϵ

Dans un premier temps on rend les intégrales adimensionnelles.

Nous avons effectué le calcul numérique en supposant une loi de fréquence de collision de la forme :

$$\frac{1}{\nu_2} = \frac{1}{\sum_{s \neq 2} \nu_{2s}^{(1)}} = \left(\frac{2kT}{m_2}\right)^{3/2} \frac{4\pi k_0^2 m_2^2}{n_2 e^4 \log\Lambda} \sum_p a_p \mathcal{E}^p \qquad (55)$$

où : $$\vec{\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m_2}{2kT}}\, \vec{C}_2 \qquad (56)$$

et où : $$\nu^* = \left(\frac{m_2}{2kT}\right)^{3/2} \frac{n_2 e^4 \log\Lambda}{4\pi k_0^2 m_2^2} \qquad (57)$$

est une fréquence de collision de référence.

Les intégrales $\mathcal{J}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}$ se trouvent exprimées en fonction d'intégrales adimensionnelles universelles $I_{p,q}$ qui sont données dans les abaques (I),(II) et (III).On trouvera tout le détail des calculs numériques dans l'annexe (II).

Il vient alors :

$$\sigma_2^{(2)} = -\frac{2(4\pi k_0)^2 (2kT)^{3/2}}{\pi^{3/2} m_2^{1/2} e^2 6\pi^{5/2}} \frac{(\log\Lambda - \frac{1}{2})}{(\log\Lambda)^2} \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p,q} \qquad (58)$$

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{3}{2} \frac{(4\pi k_0)^2 (2kT)^{5/2} m_2^{1/2}}{e^4 (\log\Lambda)^2 \pi^{3/2}} \left(\log\Lambda - \frac{1}{2}\right) \left\{ -\frac{1}{9\pi^{5/2}} \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p+2,q} + \frac{5}{18\pi^{5/2}} \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p,q} \right\} \qquad (59)$$

$$\beta_2^{(2)} = -\frac{2(4\pi k_0)^2 (2kT)^{7/2}}{e^4 (\log\Lambda)^2 m_2^{1/2} \pi^{3/2}} \left(\log\Lambda - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{24\pi^{5/2}} \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p+2,q} \quad (60)$$

$$K_2^{(2)} = \frac{5(4\pi k_0)^2 (2kT)^{7/2}}{\Gamma \pi^{3/2} e^4 (\log\Lambda)^2 m_2^{1/2}} \left(\log\Lambda - \frac{1}{2}\right) \left\{ -\frac{1}{60\pi^{5/2}} \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p+2,q+2} \right.$$

$$\left. + \frac{5}{120\pi^{5/2}} \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p+2,q} \right\} \quad (61)$$

Nous obtenons ainsi les expressions analytiques désirées.
(*) Nous pensons que des expressions analytiques plus simples doivent pouvoir être obtenues sous réserve de mieux connaitre les fonctions propres de l'opérateur : $\int_0^{2\pi} d\varepsilon \, \delta_\epsilon$

I.V) APPLICATION AUX PLASMAS COMPLETEMENT IONISES :

La pemière chose qui vient à l'esprit est de chercher si le raccord se fait avec la théorie avec la théorie de Spitzer et Härm.

Dans ce cas l'expression polynômiale de se réduit à $a_3 = 1$. Le calcul implique donc la connaissance d'intégrales I_{33}, I_{53}, I_{55} qui sont lues sur nos abaques.

Il vient :

$$\begin{cases} I_{33} = 40{,}7 \\ I_{53} = 220 \\ I_{55} = 1310 \end{cases}$$

On a figuré sur un même tableau les résultats du présent travail et ceux obtenus par Spitzer et Härm [2] .

	Présent travail	Référence [2]
$\frac{\sigma_2^{(1)} + \sigma_2^{(2)}}{\sigma_2^{(1)}}$	0,612	0,5816
$\frac{\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}}{\alpha_2^{(1)}}$	0,249	0,2727
$\frac{\beta_2^{(1)} + \beta_2^{(2)}}{\beta_2^{(1)}}$	0,476	0,4652
$\frac{K_2^{(1)} + K_2^{(2)}}{K_2^{(1)}}$	0,2765	0,2252

L'accord entre les deux résultats est raisonable,sans toutefois être aussi bon que celui des travaux de Devoto,Chmielski et Przziger.

Pour que les expressions (58) à (61) puissent être utilisées il faut que la loi (55) soit connue.Dans le cas de l'Argon on éprouve de plus en plus de difficulté à mettre la fonction inverse de la fréquence de collision sous forme polynômiale à mesure que le degré d'ionisation diminue (il ne faut pas oublier que l'Argon présente un fort effet Ramsauër).Les polynômes calculés se trouvent être d'un degré supérieur à six,ce qui dépasse la capacité de l'abaque que nous avons calculé . Mais ceci ne diminue en rien la validité des expressions (50) page I-22 .

Il existe cependant une objection à la validité de ce calcul : tout au long de l'exposé nous avons supposé l'égalité des températures T_2 et T_s , c'est à dire l'équilibre thermodynamique. Lorsque le plasma est faiblement ionisé,c'est à dire pour de très faibles valeurs du champ électrique,ceci peut être considéré comme valable.

Lorsque le plasma est au contraire completement ionisé,c'est à dire que les collisions coulombiennes dominent,étant donné l'importante section efficace attachée à ces collisions le couplage énergétique entre les lourds et les électrons devient intense.Ainsi l'écart $T_2 - T_s$ est nécéssairement réduit.

Par contre,lorsque le plasma est en régime intermédiaire,c'est à dire partiellement ionisé,il est bien connu que l'on peut observer un écart important entre ces températures.

Dans ces conditions cependant,étant donné le rapport des masses les températures des espèces lourdes resteront très semblables et nous appellerons T_g leur valeur commune.

Ceci nous amène au paragraphe suivant : (*)

I.VII) EXTENSION DE CES RESULTATS A UNE SITUATION DE NON-EQUILIBRE :

I.VII.1) IONISATION HORS D'EQUILIBRE :

➡ Justification de la loi de Saha :

Si le champ électrique n'est pas trop élevé et si la densité électronique est assez forte (* *),d'une part la fréquence des collisions inélastiques électron-particules lourdes pourra être plus faible que la fréquence des collisions mutuelles électroniques,d'autre part la fonction de distribution de la vitesse électronique restera proche de la fonction maxwellienne (* * *).

(*) : Dans ce qui suit nous adopterons les indices e,i,n pour les espèces électrons,ions et neutres.

(* *) : Ces conditions ont été étudiées par Ben Daniel et Tamor, voir référence [9] .

(* * *) : Voir Sutton et Sherman : Engineering aspects of Magneto-hydrodynamics.Mac Graw Hill Book Company.

Si de plus le mécanisme dominant de l'ionisation-désionisation est du type :

$$e + n \rightleftharpoons i + 2e \qquad (62)$$

et si la radiation de résonance est piégée, de telle façon que les pertes radiatives demeurent insignifiantes, alors la densité électronique pourra se calculer au moyen de la loi de Saha basée sur la température électronique T_e :

$$\frac{n_e n_i}{n_n} = \frac{P_e^{int} P_i^{int}}{P_n^{int}} e^{-\frac{G_i}{kT_e}} \left(\frac{2\pi m_e k T_e}{h^2} \right)^{3/2} \qquad (63)$$

I.VII .2) <u>CALCUL DES PARAMETRES DE TRANSPORT HORS EQUILIBRE</u> :

En toute rigueur nous ne pouvons dire que l'équation :

$$\sum_{s \neq 2} n_e n_s I_{es} \left(\Phi_e^{(1)} \right) = 0 \qquad (64)$$

peut être satisfaite par une solution maxwellienne :

$$f_e^{(0)} = n_e \left(\frac{m_e}{2\pi k T_e} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_e c_e^2}{2kT_e}} \qquad (65)$$

Mais dans la mesure où le phénomène hors d'équilibre reste limité nous admettrons que cela est vérifié. Nous aurons par contre rigoureusement :

$$J_{ee}^{(0)} = 0$$

Reportons nous page 14 équation (25).Que signifie ces approximations ?

En clair : les particules lourdes se comportent dans les collisions avec les électrons comme des cibles quasi immobiles.On doit donc admmettre que dans une situation hors équilibre la température des lourds n'apparaisse pas directement.Elle apparaitra comme on le verra plus loin dans le cut-off (distance de Debye).

Sur cette base il est aisé de voir que les calculs que nous avons faits peuvent être reconduits en remplaçant T par T_e dans les expressions.

Problème du cut-off :

L'équation de Poisson, ϕ étant le potentiel électrique,s'écrit :

$$\Delta\phi + \frac{(\rho_e + \rho_i)}{4\pi K_o} = 0 \qquad (66)$$

Supposant le régime permanent nous représenterons en première approximation les espèces électroniques et ioniques,soumises à l'action du champ dérivant du potentiel ϕ par les maxwelliennes déplacées :

$$\begin{cases} f_e^{(0)} = n_{e_o}\left(\dfrac{m_e}{2\pi k T_e}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_e c_e^2}{2kT_e} + \frac{e\phi}{kT_e}} & (67) \\ f_i^{(0)} = n_{i_o}\left(\dfrac{m_i}{2\pi k T_g}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_i c_i^2}{2kT_g} + \frac{Z_i e\phi}{kT_g}} & (68) \end{cases}$$

Z_i étant la charge des ions.

Ce qui entraine :

$$\begin{cases} n_e = n_{eo}\, e^{e\phi/kT_e} & (69) \\ n_i = n_{io}\, e^{-Z_i e\phi/kT_g} & (70) \end{cases}$$

On supposera la neutralité du plasma réalisée. $n_{io} = Z_i n_{eo}$

Ecrivons l'équation de Poisson en coordonnées sphériques, en linéarisant les exponentielles :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = \frac{e^2 n_{eo}}{k k_o}\phi\left(\frac{Z_i}{T_g} + \frac{1}{T_e}\right) \qquad (71)$$

D'où la solution :

$$\phi_s = \phi_1\, e^{-\sqrt{1+Z_i}\; r/d'} \qquad (72)$$

où :

$$d' = \left(\frac{k k_o}{n_{eo} e^2}\,\frac{(1+Z_i)\,T_e T_g}{Z_i T_e + T_g}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (73)$$

ϕ_1 étant l'expression du potentiel en absence de l'effet d'écran ; En prenant $Z_i = 1$ nous obtenons l'expression de la distance de Debye hors d'équilibre :

$$\boxed{d' = \left(\frac{k k_o}{n_{eo} e^2}\,\frac{2 T_e T_g}{T_e + T_g}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (74)$$

I — 30 —

Il serait tout à fait illusoire de donner l'expression correspondant à Z_i 1 ,laquelle ne peut correspondre qu'à de fortes ionisations, donc à un champ élevé,ce qui est contraire à notre hypothèse.

L'expression d' ne doit être utilisée que dans un plage limitée du rapport T_e/T_g .Il conviendrait de chiffrer exactement la limite de validité.Par exemple,pour des valeurs excessives de ce rapport on ne pourrait plus valider la représentation des distributions par des maxwelliennes déplacées.Il nous semble que la limite $T_e/T_g < 5$ semble raisonable,pour des plasmas à pression atmosphérique.

La nouvelle valeur d' sera à introduire dans le paramètre de Spitzer, bien connu : $\log \Lambda$ .Cette précaution prise on écrira :

$$\sigma_2^{(2)} = -\frac{2(4\pi k_0)^2(2kT_e)^{3/2}}{\pi^{3/2} m_e^{1/2} e^2 (\log\Lambda)^2} \frac{(\log\Lambda - \frac{1}{2})}{6\pi^{5/2}} \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p,q} \qquad (75)$$

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{3}{2} \frac{(4\pi k_0)^2 (2kT_e)^{5/2} m_e^{1/2}}{e^4 \pi^{3/2} (\log\Lambda)^2} (\log\Lambda - \frac{1}{2}) \left\{ -\sum_p \sum_q a_p a_q I_{p+2,q} \left(\frac{1}{9\pi^{5/2}}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{5}{18\pi^{5/2}} \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p,q} \right\} \qquad (76)$$

$$\beta_2^{(2)} = -\frac{2(4\pi k_0)^2 (2kT_e)^{7/2}}{e^4 (\log\Lambda)^2 m_e^{1/2} \pi^{3/2}} (\log\Lambda - \frac{1}{2}) \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p+2,q} \left(\frac{1}{24\pi^{5/2}}\right)$$

$$K_2^{(2)} = \frac{5(4\pi k_0)^2 (2kT_e)^{7/2} (\log\Lambda - \frac{1}{2})}{T_e \pi^{3/2} e^4 m_e^{1/2} (\log\Lambda)^2} \left\{ -\frac{1}{60\pi^{5/2}} \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p+2,q+2} \right. \qquad (77)$$

$$\left. + \frac{5}{120\pi^{5/2}} \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p+2,q} \right. \qquad (78)$$

I.VIII) SECONDE METHODE, BASEE SUR L'OPERATEUR DE BHATNAGAR, GROSS et KROOK :

Introduisons le formalisme de B.G.K (Référence I [23]) :

$$\mathcal{J} f_e = -\nu_e \left(f_e - f_e^{(0)} \right) \qquad (79)$$

et explicitons le second membre en écrivant :

$$\mathcal{J} f_e = - \nu_{ee} \left(f_e - f_e^{(0)} \right) - \sum_{s \neq e} \nu_{es} \left(f_e - f_e^{(0)} \right) \qquad (80)$$

où :
$$\begin{cases} \nu_{es} = n_s \, Q_{es} \, c_e \\ \nu_{ee} = n_e \, Q_{ee} \, g \end{cases} \qquad (81)$$

Q_{es} et Q_{ee} sont les sections efficaces de collision du premier ordre associées à l'interaction électron-électrons et électron-particules lourdes. $\mathcal{J}$ est la vitesse relative entre deux électrons dans la collision. Remplaçons g par sa valeur moyenne : $\sqrt{2}\, c_e$

On sait que $Q_{ee} = \frac{1}{2} Q_{ei}$ (Réf. I [10], page 88). (82)

En prenant : $n_e = n_i$ (83)

Il vient :

$$\mathcal{J} f_e = -\left(f_e - f_e^{(0)} \right) \left(\sum_n \nu_{en} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \nu_{ei} \right) \qquad (84)$$

I – 32

ν_{en} étant la fréquence de collision électron-neutres et ν_{ei} la fréquence de collision électron-ions.

Supposant le plasma stationnaire et homogène assimilons $\mathcal{D} f_e$ à $\mathcal{D}^{(1)}(f^{(0)})$

il vient :

$$f_e^{(1)} = \frac{-\mathcal{D}^{(1)}}{\nu_{en} + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\nu_{ei}} \qquad (85)$$

en ayant posé bien sûr : $f_e = f^{(0)} + f^{(1)}$ (86)

Donnons alors à $f_e^{(1)}$ la forme Lorentzienne :

$$f_e^{(1)} = \frac{e}{m_e}\left(\vec{E}.\vec{c}_e\right) f_1(c_e) \qquad (87)$$

La conductivité électrique scalaire, calculée à l'aide de cette solution, devient :

$$\sigma_e = \frac{4\pi e^2}{3kT}\int_0^\infty \frac{c_e^4 f_e^{(0)}}{\nu_{en} + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\nu_{ei}}\, dc_e \qquad (88)$$

On retrouve l'expression d'Allis* où l'on aurait remplacé la fréquence de collision par l'expression :

$$\nu_{en} + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\nu_{ei} \qquad (89)$$

* Référence 10 de ce chapitre

En situation complètement ionisée on a : $\nu_{en} \ll \nu_{ei}$

Et l'on obtient :

$$\sigma_{ei} = \frac{2}{2+\sqrt{2}} \sigma_L = 0,58582\, \sigma_L \qquad (90)$$

σ_L étant la solution dans l'approximation de Lorentz.

On retrouve à très peu près le résultat de Spitzer et Härm (voir le tableau de la page (40).

En suivant le même raisonnement pour $Z_i > 1$, nous aurons :

$$\sigma_e = \frac{4\pi e^2}{3kT} \int_0^\infty \frac{Z_i\, c_e^4 f_e^{(0)}\, dc_e}{\sum_n \nu_{en} + \sum_i Z_i^2 \nu_{ei}^{(1)} + \frac{\sqrt{2}}{2} Z_i \nu_{ei}^{(1)}} \qquad (91)$$

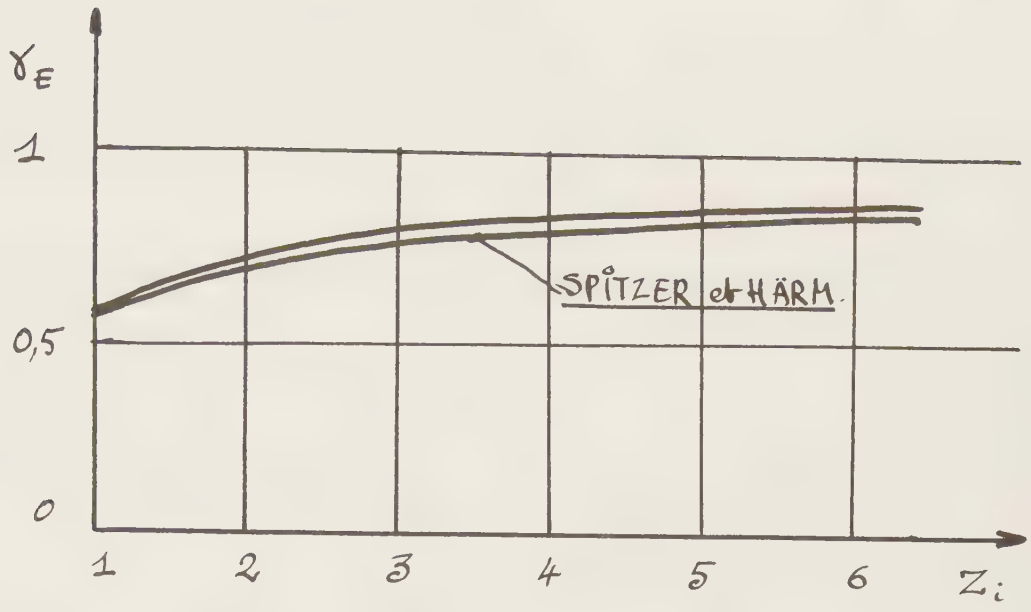
où $\nu_{ei}^{(1)}$ correspond à $Z_i = 1$ .En effet la section efficace de collision électron-électrons varie en Z_i^2 .

En complètement ionisé si l'on note par σ_L la solution Lorentzienne il vient :

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_L} = \frac{Z_i^2}{Z_i^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} Z_i} \qquad (92)$$

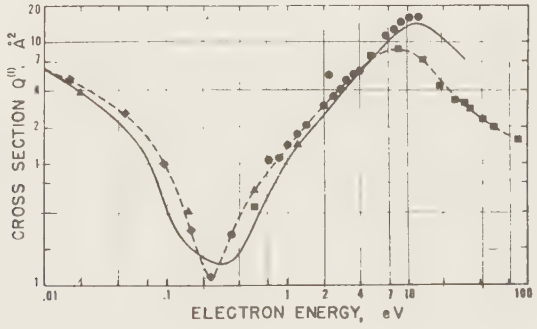
Ce qui nous donne :

Z_i	1	2	3	4	5	6	
$\gamma_E = \frac{\sigma_e}{\sigma_L}$	0,5858	0,739	0,8095	0,85	0,876	0,895	
γ_E Spitzer & Härm	0,5816	0,6833	....	0,7849	....	....	



L'accord avec Spitzer et Härm est bon (8 %).On note que la réduction de conductivité obtenue est légèrement plus faible.

Une application de (88) a été effectuée dans le cas de l'Argon. A dessein nous avons pris les mêmes valeurs de section efficace électron-neutres et les mêmes degrés d'ionisation que Devoto.



Sections efficaces de l'Argon d'après :

-Diamants : Ramsauër et Kollath (Réf. I [24])

-Losanges : O'Malley (Réf. [25])

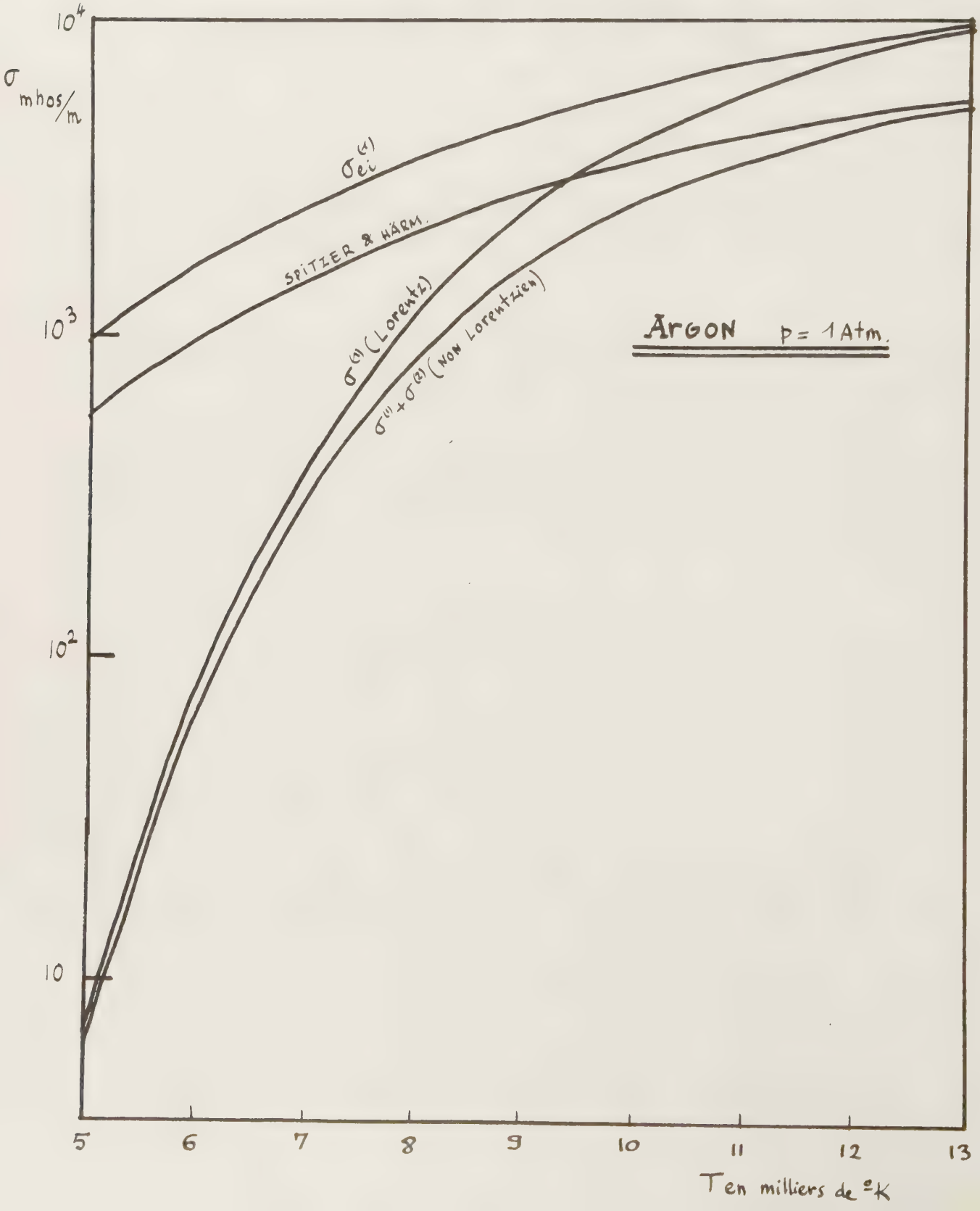
-Triangles: Kivel (Réf. [26])

-Carrés : Westin (Réf. [27])

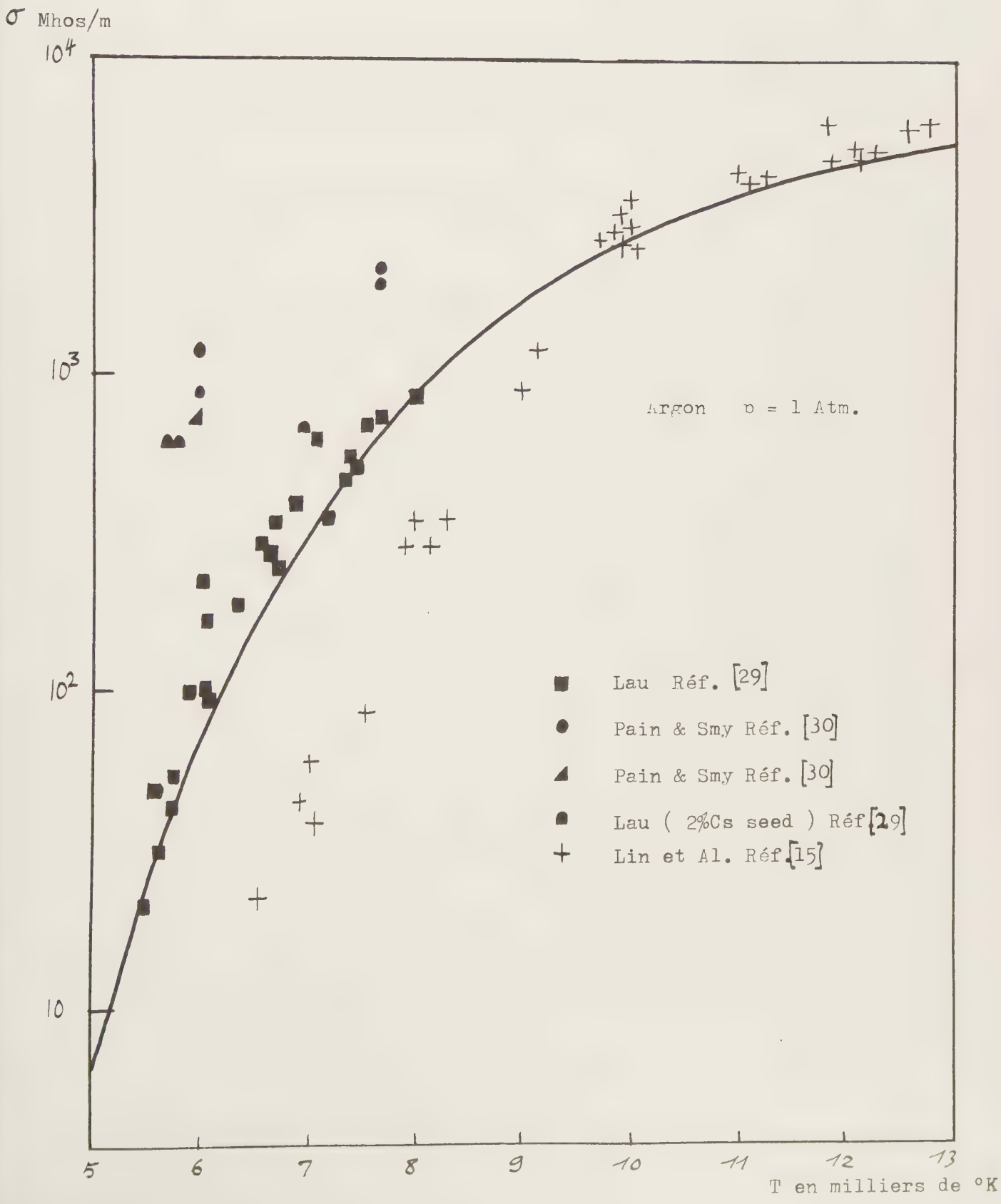
-Courbe continue : Frost & Phelps (Réf. [28])

-En tireté : la courbe choisie par Devoto.

Le résultat du calcul est porté sur la figure ci-après.On note un bon accord avec les résultats expérimentaux.Eu égard à la précision du calcul il n'apparait pas de différence significative entre ces résultats et ceux obtenus par Devoto.



Comparaison avec des résultats d'expérience :



Aux basses températures l'écart avec les résultats de Lin provient du fait que l'ionisation n'est pas achevée (expérimentation en tube à choc).

Remarque :

Dans l'état actule des connaissances une certaine imprécision subsiste quant aux sections efficaces de collision électron-neutres. Des résultats sensiblement différents peuvent être obtenus suivant les valeurs retenues.

Ainsi la précision systématique de ce type de calcul se trouve limitée à 5 à 10 %.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

ANNEXE (I) DU CHAPITRE I :

CALCUL DE LA VISCOSITE $\mu_2^{(2)}$.

$$\nu_{2s}^{(2)} = 3\pi n_s \phi_{2s}^{(2)}$$

avec : $\phi_{2s}^{(2)} = \phi = c^{te}$

$$\vec{\vec{p}}_2^{(2)} = \frac{m_2^2 n_2^2}{9\pi^2 kT \sum_{s\neq 2} n_s^2 \phi^2} \left[\vec{\vec{C_2 C_2}}, \frac{\vec{\vec{\partial \mathcal{L}_0}}}{\partial 2} : \vec{\vec{C_2 C_2}}^{\circ} \right]_2$$

$$\begin{cases} \vec{C_2} = \vec{G} + \vec{g}/2 \\ \vec{C}_{2(1)} = \vec{G} - \vec{g}/2 \end{cases}$$

$$\vec{\vec{p}}_2^{(2)} = \frac{m_2^2}{9\pi^2 kT \sum_{s\neq 2} n_s^2 \phi^2} \iiint f_2^{(0)} f_{2(1)}^{(0)} \vec{\vec{C_2 C_2}} \left(\frac{\vec{\vec{\partial \mathcal{L}_0}}}{\partial 2} : \delta_\varepsilon \vec{\vec{C_2 C_2}}^{\circ} \right)$$

$$\times\ g\, b\, db\, d\varepsilon\, d\vec{C}_2\, d\vec{C}_{2(1)}$$

d'après : [1] 10.321 .... (9) p. 176

$$\int_0^{2\pi} d\varepsilon\, \delta_\epsilon \overrightarrow{C_2 C_2} = \frac{3\pi}{2}\left(1 - \cos^2\chi\right) \overrightarrow{\overrightarrow{gg}}$$

Par ailleurs :

$$f_2^{(0)} f_{2(1)}^{(0)} = n_2^2 \left(\frac{m_2}{2\pi kT}\right)^3 e^{-\frac{m_2 G^2}{kT}} e^{-\frac{m_2 g^2}{4kT}}$$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{p}}_2^{(2)} = \frac{m_2^2}{9\pi^2 kT \sum_{s\neq 2} n_s^2 \phi^2} \cdot \frac{3\pi}{2} \times$$

$$\iiint f_2^{(0)} f_{2(1)}^{(0)} \left(\overrightarrow{G}\overrightarrow{G} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\overrightarrow{gg}} + \overrightarrow{Gg}\right)\left(\overrightarrow{\overrightarrow{\frac{\partial \omega}{\partial z}}} : \overrightarrow{\overrightarrow{gg}}\right) \phi_{22}^{(2)}\, d\overrightarrow{G}\, d\overrightarrow{g}$$

Il vient :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{p}}_2^{(2)} = \frac{m_2^2 n_2^2}{24\pi kT \sum_{s\neq 2} n_s^2 \phi^2} \int \left(\frac{m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_2 G^2}{kT}}\, d\overrightarrow{G}$$

$$\times \int \left(\frac{m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_2 g^2}{4kT}} \phi_{22}^{(2)}\, \overrightarrow{\overrightarrow{gg}} \left(\overrightarrow{\overrightarrow{\frac{\partial \omega}{\partial z}}} : \overrightarrow{\overrightarrow{gg}}\right) d\overrightarrow{g}$$

$$\int \left(\frac{m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_2 G^2}{kT}} \overrightarrow{dG} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et, d'après [1] 1.421 ... p.23 :

$$\vec{\vec{p}}_2^{(2)} = \frac{m_2^2 n_2^2}{360\pi\sqrt{2}\, kT \sum_{s\neq 2} n_s^2 \phi^2} \frac{\vec{\vec{\partial G_0}}}{\partial_2}$$

$$\times \int_0^\infty \left(\frac{m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_2 g^2}{4kT}} \phi_{22}^{(2)}\, 4\pi g^6 dg$$

$$\vec{\vec{I}}_2^{(2)} = -2\mu_2^{(2)} \frac{\vec{\vec{\partial G_0}}}{\partial_2}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{m_2 g^2}{4kT}} \phi_{22}^{(2)}\, g^6 dg = \left(\frac{2kT}{m_2}\right)^2 \frac{e^4 \log\Lambda}{4\pi K_0^2 m_2^2}$$

$$\mu_2^{(2)} = -\frac{n_2^2\, e^4 \log\Lambda}{720\, \pi^{5/2} m_2^{1/2} (kT)^{1/2} K_0^2 \sum_{s\neq 2} n_s^2 \phi^2}$$

ANNEXE (II) du CHAPITRE I :

CALCUL NUMERIQUE DES INTEGRALES $\mathcal{J}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}$

Nous allons tout d'abord introduire un certain nombre de variables adimensionnelles.

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{C}} = \sqrt{\dfrac{m_2}{2kT}}\ \vec{c_2} \\ \vec{\mathcal{C}_1} = \sqrt{\dfrac{m_2}{2kT}}\ \vec{c_{2(1)}} \\ \vec{g} = \vec{c_2} - \vec{c_{2(1)}} = \sqrt{\dfrac{2kT}{m_2}}\ \vec{\gamma} \\ \vec{G} = \sqrt{\dfrac{2kT}{m_2}}\ \vec{\Gamma} = \dfrac{\vec{c_2} + \vec{c_{2(1)}}}{2} \\ b = \beta\, d \end{cases}$$

d étant la distance de Debye.

On pose :

$$(\vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{G}})_2 = \iiint \left(\vec{\mathcal{F}} \cdot \delta_\epsilon \vec{\mathcal{G}}\right) e^{-\mathcal{E}^2} e^{-\mathcal{E}_1^2} \times \gamma\beta\, d\beta\, d\varepsilon\, d\vec{\mathcal{E}}_1\, d\vec{\mathcal{E}}$$

Il vient :

$$\mathcal{M}_c = \frac{A}{(V^*)^2} \sum_p \sum_q \left(\mathcal{E}^p \vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}^q \vec{\mathcal{E}}\right)_2$$

$$\mathcal{P} = \left(\frac{2kT}{m_2}\right) \frac{A}{(V^*)^2} \sum_p \sum_q \left(\mathcal{E}^{p+2} \vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}^q \vec{\mathcal{E}}\right)_2$$

$$\mathcal{Q} = \frac{A}{(V^*)^2} \left(\frac{2kT}{m_2}\right)^2 \sum_p \sum_q \left(\mathcal{E}^{p+2} \vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}^{q+2} \vec{\mathcal{E}}\right)_2$$

on posera :

$$K_{pq} = \left(\mathcal{E}^p \vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}^q \vec{\mathcal{E}}\right)$$

$$\begin{cases} \mathcal{J} = \dfrac{A}{(\nu^*)^2} \sum_p \sum_q K_{p,q} \\ \mathcal{P} = \dfrac{A}{(\nu^*)^2} \left(\dfrac{2kT}{m_2}\right) \sum_p \sum_q K_{p+2,q} \\ \mathcal{Q} = \dfrac{A}{(\nu^*)^2} \left(\dfrac{2kT}{m_2}\right)^2 \sum_p \sum_q K_{p+2,q+2} \end{cases}$$

En passant en coordonnées de centre de masse nous écrirons :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{C}} + \vec{\mathcal{C}}_1 = 2\vec{\Gamma} \\ \vec{\mathcal{C}} - \vec{\mathcal{C}}_1 = \vec{\gamma} \end{cases}$$

...et en coordonnées sphériques :

$$\vec{\Gamma} \begin{cases} \Gamma \\ \theta_\Gamma \\ \varphi_\Gamma \end{cases} \qquad \vec{\gamma} \begin{cases} \gamma \\ \theta_\gamma \\ \varphi_\gamma \end{cases}$$

posons de plus :

$$\begin{cases} \theta = \theta_\gamma - \theta_\Gamma \\ \varphi = \varphi_\gamma - \varphi_\Gamma \end{cases}$$

On a :

$$K_{pq} = \iiint \left(e^p \vec{e} \cdot \delta_\epsilon e^q \vec{e} \right) e^{-2\Gamma^2} e^{-\frac{\gamma^2}{2}}$$

$$\times \gamma^3 \Gamma^2 \rho \, d\rho \, d\varepsilon \, |\sin\varphi_\gamma| |\sin\varphi_\Gamma| \, d\varphi_\gamma \, d\varphi_\Gamma \, d\theta_\gamma \, d\theta_\Gamma \, d\Gamma \, d\gamma$$

Nous allons voir tout à l'heure que :

$e^p \vec{e} \cdot \delta_\epsilon \left(e^q \vec{e} \right)$ peut se mettre sous la forme approchée :

$$A_{pq} \left(1 - \cos^2 \chi \right)$$

Ainsi :

$$K_{pq} = \iiint A_{pq} e^{-2\Gamma^2} e^{-\frac{\gamma^2}{2}} \gamma^3 \Gamma^2 |\sin\varphi_\gamma| |\sin\varphi_\Gamma|$$

$$d\varphi_\gamma \, d\varphi_\Gamma \, d\theta_\gamma \, d\theta_\Gamma \, d\Gamma \, d\gamma \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^1 \left(1 - \cos^2 \chi \right) \beta \, d\beta$$

(il s'agit d'une collision entre deux électrons).

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - \cos^2 \chi \right) \beta \, d\beta \, d\varepsilon = \Omega_{22}^{(2)} = B \, \gamma^{-4} .$$

$$K_{pq} = B \iiint \mathcal{A}_{pq}\, e^{-2\Gamma^2}\, e^{-\frac{\gamma^2}{2}} \left(\frac{\Gamma^2}{\gamma}\right) |\sin\varphi_\gamma|\,|\sin\varphi_\Gamma| \times d\varphi_\gamma\, d\varphi_\Gamma\, d\theta_\gamma\, d\theta_\Gamma\, d\Gamma\, d\gamma$$

posons : $K_{pq} = B\, I_{pq}$

$$\mathcal{J} = \frac{AB}{(\nu^*)^2} \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p,q}$$

$$\mathcal{P} = \frac{AB}{(\nu^*)^2} \left(\frac{2kT}{m_2}\right) \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p+2,q}$$

$$\mathcal{Q} = \frac{AB}{(\nu^*)^2} \left(\frac{2kT}{m_2}\right)^2 \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p+2,q+2}$$

$$\sigma_2^{(2)} = -\frac{e^2}{3kT} \frac{AB}{(\nu^*)^2} \sum_p \sum_q I_{p+2,q}$$

$$\alpha_2^{(2)} = -\frac{m_2^2}{6kT} \frac{AB}{(\nu^*)^2} \left(\frac{2kT}{m_2}\right) \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p+2,q}$$

$$+ \frac{5}{6} m_2 \frac{AB}{(\nu^*)^2} \sum_p \sum_q a_p a_q I_{p,q} \ldots$$

$$\beta_2^{(2)} = -\frac{m_2}{6}\frac{AB}{(v^*)^2}\left(\frac{2kT}{m_2}\right)\sum_p\sum_q a_p a_q I_{p+2,q}$$

$$k_2^{(2)} = -\frac{m_2^2}{12kT^2}\frac{AB}{(v^*)^2}\left(\frac{2kT}{m_2}\right)^2\sum_p\sum_q a_p a_q I_{p+2,q+2}$$

$$+\frac{m_2}{6T}\frac{AB}{(v^*)^2}\left(\frac{2kT}{m_2}\right)\sum_p\sum_q a_p a_q I_{p+2,q}$$

Posons :

$$\sigma_2^{(2)} = -\sigma_{2i}^{(1)} C_\sigma \sum_p\sum_q a_p a_q I_{pq}$$

$$\alpha_2^{(2)} = -\alpha_{2i}^{(1)} C_\alpha\left[\sum_p\sum_q a_p a_q I_{p+2,q} - \frac{5}{2}\sum_p\sum_q I_{p,q}\right]$$

$$\beta_2^{(2)} = -\beta_{2i}^{(1)} C_\beta\left[\sum_p\sum_q a_p a_q I_{p+2,q}\right]$$

$$k_2^{(2)} = -k_{2i}^{(1)} C_k\left[\sum_p\sum_q a_p a_q I_{p+2,q+2} - \frac{5}{2}\sum_p\sum_q a_p a_q I_{p+2,q}\right]$$

Les expressions $\sigma_{2i}^{(1)}$, $\alpha_{2i}^{(1)}$ / $\beta_{2i}^{(1)}$, $K_{2i}^{(1)}$

sont les paramètres de transport Lorentziens, dans une interaction totalement coulombienne. Ils ont pour expression :

$$\sigma_{2i}^{(1)} = \frac{2(4\pi K_0)^2 (2kT)^{3/2}}{e^2 \log\Lambda \, \pi^{3/2} m_2^{1/2}}$$

$$\alpha_{2i}^{(1)} = \frac{3}{2} \frac{(4\pi K_0)^2 (2kT)^{5/2} m_2^{1/2}}{e^4 \log\Lambda \, \pi^{3/2}}$$

$$\beta_{2i}^{(1)} = \frac{2(4\pi K_0)^2 (2kT)^{7/2}}{e^4 \log\Lambda \, m_2^{1/2} \, \pi^{3/2}}$$

$$K_{2i}^{(1)} = \frac{5(4\pi K_0)^2 (2kT)^{7/2}}{T \, \pi^{3/2} e^4 \log\Lambda \, m_2^{1/2}}$$

Les coefficients C_σ , C_α , C_β , C_k sont ainsi adimensionnels.

Evaluons nos paramètres A et B :

$$A = \left(\frac{2kT}{m_2}\right)^{3/2} \frac{n_2^2 d^2}{\pi^3}$$

$$\Omega_{22}^{(1)} = 2\pi \cdot \frac{1}{16\pi^2 m_2^2 d^6} \left(\log\Lambda - \frac{1}{2}\right) \gamma^{-4}$$

$$B = \frac{1}{8\pi m_2^2 d^6} \left(\log\Lambda - \frac{1}{2}\right)$$

On a pris $\Omega_{22}^{(2)} = Q_{2i}^{(2)} d^2$

$Q_{2i}^{(2)}$ étant la section efficace coulombienne d'ordre deux.

$$\frac{AB}{(\nu^*)^2} = \frac{\log\Lambda - \frac{1}{2}}{(\log\Lambda)^2} \left(\frac{2kT}{m_2}\right)^{3/2} \frac{2 K_0^4 m_2^4}{\pi^2 d^4 m_i^2 \epsilon^8}$$

Soit :

$$\frac{AB}{(\nu^*)^2} = \frac{\log\Lambda - \frac{1}{2}}{(\log\Lambda)^2} \frac{8 K_0^2 m_i^2}{\pi^2 \epsilon^4} \left(\frac{2kT}{m_2}\right)^{5/2}$$

~~Posons~~ : Il vient

$$C_\sigma = \frac{1}{6\pi^{5/2}} \frac{\log\Lambda - \frac{1}{2}}{\log\Lambda}$$

$$C_\alpha = \frac{1}{9\pi^{5/2}} \frac{\log\Lambda - \frac{1}{2}}{\log\Lambda}$$

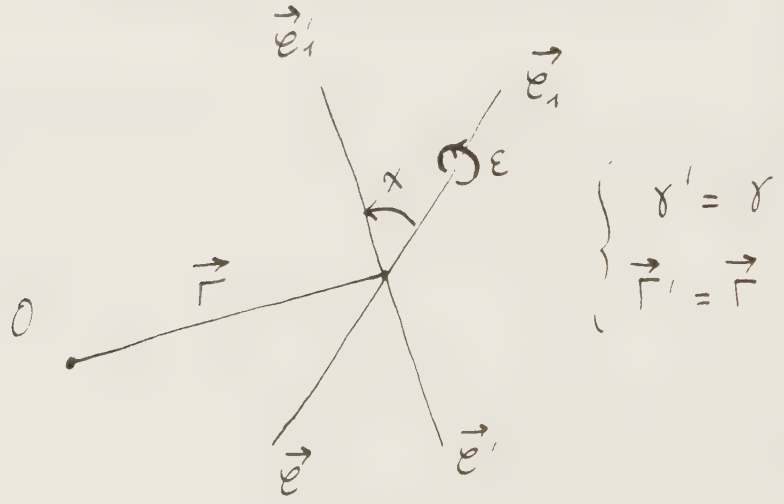
→→

$$C_\beta = \frac{1}{24\,\pi^{5/2}} \; \frac{\log\Lambda - \frac{1}{2}}{\log\Lambda}$$

$$C_K = \frac{1}{60\,\pi^{5/2}} \; \frac{\log\Lambda - 1/2}{\log\Lambda}$$

D'où les expressions (58),(59),(60) et (61),pages 24 et 25.
Nous ne sommes pas au bout de nos peines car il reste à calculer effectivement les intégrales $I_{p,q}$.

Figurons la géométrie d'une collision :



et posons : $e^p\vec{e} \cdot \delta_\epsilon\left(e^q\vec{e}\right) = A_{pq}$

Cette quantité dépend à priori de ε ,variable collisionnelle indépendante.Mais l'origine des ε est arbitraire.De plus la déflexion χ est la même quel que soit ε .On en déduit que cette variable peut être intégrée séparément,le résultat fournissant la quantité 2π .

on a :

$$\theta = \theta_\gamma - \theta_\Gamma$$

$$\varphi = \varphi_\gamma - \varphi_\Gamma$$

posons : $$\frac{\Gamma\gamma\cos\varphi}{\Gamma^2+\frac{\gamma^2}{4}} = \mu$$

$$H_{pq} = \left(\Gamma^2+\frac{\gamma^2}{4}\right)^{\frac{p+q}{2}} \left(1+\mu\cos\theta\right)^{p/2} \times$$

$$\left(1+\mu\cos\theta\right)^{q/2}\left(\Gamma^2+\frac{\gamma^2}{4}\right)$$

$$+\left(1-\mu\cos\theta\right)^{q/2}\left(\Gamma^2-\frac{\gamma^2}{4}\right)$$

$$-\left(1+\mu\cos(\theta-\chi)\right)^{q/2}\left(\Gamma^2+\frac{\gamma^2}{4}\cos\chi+\frac{\Gamma\gamma}{2}\cos\varphi\cos\theta+\frac{\Gamma\gamma}{2}\cos\varphi\cos(\theta-\chi)\right]$$

$$-\left(1-\mu\cos(\theta-\chi)\right)^{q/2}\left[\Gamma^2-\frac{\gamma^2}{4}\cos\chi+\frac{\Gamma\gamma}{2}\cos\varphi\cos\theta-\frac{\Gamma\gamma}{2}\cos\varphi\cos(\theta-\chi)\right]$$

on remarquera que $\mu < 1$

Ce qui va nous permettre de développer en série.

Posons :

$$(1+\mu\cos\theta)^{p/2} = P(\theta) + I(\theta)$$

$$(1+\mu\cos\theta)^{q/2} = \varphi(\theta) + \psi(\theta)$$

$P(\theta)$ et $\varphi(\theta)$ étant pairs

$I(\theta)$ et $\psi(\theta)$ étant impairs

On trouve aisément que :

$$\Phi_{pq} = \left(r^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^{\frac{p+q}{2}} \times$$

$$\Big\{ 2r^2 P(\theta)\left[\varphi(\theta) - \varphi(\theta-\chi)\right]$$

$$+ r\gamma\cos\varphi\left[\varphi(\theta) - \varphi(\theta-\chi)\right]\cos\theta\, I(\theta)$$

$$+ r\gamma\cos\varphi\, P(\theta)\left[\cos\theta\,\psi(\theta) - \cos(\theta-\chi)\psi(\theta-\chi)\right]$$

$$+ \frac{\gamma^2}{2} I(\theta)\left[\psi(\theta) - \cos\chi\,\psi(\theta-\chi)\right] \Big\}$$

Posons :

$$P(\theta) = P_0 + P_2 \cos^2\theta + P_4 \cos^4\theta + P_6 \cos^6\theta$$

$$I(\theta) = I_1 \cos\theta + I_3 \cos^3\theta + I_5 \cos^5\theta$$

$$\varphi(\theta) = \varphi_0 + \varphi_2 \cos^2\theta + \varphi_4 \cos^4\theta + \varphi_6 \cos^6\theta$$

$$\psi(\theta) = \psi_1 \cos\theta + \psi_3 \cos^3\theta + \psi_5 \cos^5\theta$$

A_{pq} peut alors s'exprimer entièrement en fonction des: $\cos(m\theta - x)$

Soit : $A_{pq} = a_0(x) + a_1(x)\cos(\theta - x) + a_2(x)\cos(2\theta - x)$

$\theta = \theta_\gamma - \theta_\Gamma$ variant chacun entre zéro et 2π

Dans l'intégration : $\int_0^{2\pi} d\theta_\gamma \int_0^{2\pi} d\theta_\Gamma$

ne subsistera que $a_0(x)$

On peut prendre $A_{pq} = a_0(x)$

Les développements en série définis plus haut nous permettant d'aller jusqu'au sixième ordre.

$$A_{pq} = A_{pq}^{(0)} + A_{pq}^{(1)}\mu + A_{pq}^{(2)}\mu^2 + A_{pq}^{(3)}\mu^3 + A_{pq}^{(4)}\mu^4 + A_{pq}^{(5)}\mu^5 + A_{pq}^{(6)}\mu^6$$

il vient :

$$A_{pq}^{(0)} = A_{pq}^{(1)} = 0$$

$$A_{pq}^{(2)} = \frac{\gamma^2}{4}\left(I_1 \Psi_1\right)\left(1-\cos^2\chi\right)$$

$$A_{pq}^{(3)} = \frac{\Gamma\gamma\cos\varphi}{4}\left(I_1\varphi_2 + \Psi_1 P_2\right)\left(1-\cos^2\chi\right)$$

$$A_{pq}^{(4)} = \left[\Gamma^2 P_2\varphi_2 + \frac{3}{16}\gamma^2\left(I_1\Psi_3 + I_3\Psi_1\right)\right]\left(1-\cos^2\chi\right)$$

$$A_{pq}^{(5)} = \frac{\Gamma\gamma\cos\varphi}{4}\left(I_1\varphi_4 + \Psi_1 P_4 + I_3\varphi_2 + \Psi_3 P_2\right)\left(1-\cos^2\chi\right)$$

$$A_{pq}^{(6)} = \Gamma^2\left(P_2\varphi_4 + P_4\varphi_2\right)\left(1-\cos^2\chi\right)$$

$$+ \frac{\gamma^2}{2}\left[\frac{10}{32}\left(\Psi_1 I_5 + \Psi_5 I_1\right) + \frac{3}{16} I_3\Psi_3\right]\left(1-\cos^2\chi\right)$$

$$+ \frac{\gamma^2}{16} I_3\Psi_3\left(1-\cos^4\chi\right)$$

Si on se limite au sixième ordre on voit que la facteur $\left(1-\cos^2\chi\right)$ apparait partout.

$$I_{pq} = \iiint A_{pq}\left(1-\cos^2\chi\right) e^{-2\Gamma^2} e^{-\gamma^2/2}\,\Gamma^2\gamma^3$$

$$\times \left|\sin\varphi_\gamma\right|\left|\sin\varphi_\Gamma\right|\beta\,d\beta\,d\varepsilon\,d\theta_\gamma\,d\theta_\Gamma\,d\varphi_\gamma\,d\varphi_\Gamma\,d\Gamma\,d\gamma$$

$$\begin{cases} A_{pp}^{(2)} = \dfrac{\gamma^2}{4} I_1^2 \mu^2 \\ A_{pp}^{(3)} = \dfrac{\Gamma\gamma\cos\varphi}{2} (I_1 I_2) \mu^3 \\ A_{pp}^{(4)} = \left[\Gamma^2 I_2^2 + \dfrac{3}{8} \gamma^2 (I_1 I_3) \right] \mu^4 \\ A_{pp}^{(5)} = \dfrac{\Gamma\gamma\cos\varphi}{2} \left[I_1 I_4 + I_3 I_2 \right] \mu^5 \end{cases}$$

Ainsi

$$A_{11} = \left(\Gamma^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right) \left[\frac{\gamma^2\mu^2}{4} - \frac{\Gamma\gamma\cos\varphi\,\mu^3}{32} + \frac{\Gamma^2\mu^4}{64} + \frac{3\gamma^2\mu^4}{256} \right]$$

$$A_{22} = \left(\Gamma^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^2 \left[\frac{\mu^2\gamma^2}{4} \right]$$

$$A_{33} = \left(\Gamma^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^3 \left(\frac{9}{16}\mu^2\gamma^2 + \frac{9}{32}\Gamma\gamma\cos\varphi\,\mu^3 + \frac{9}{64}\left(\Gamma^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)\mu^4 \right)$$

$$A_{44} = \left(\Gamma^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^4 \left(\gamma^2\mu^2 + \Gamma\gamma\cos\varphi\,\mu^3 + \Gamma^2\mu^4 \right)$$

$$A_{55} = \left(\Gamma^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^5 \left(\frac{25}{16}\mu^2\gamma^2 + \frac{75}{32}\Gamma\gamma\cos\varphi\,\mu^3 + \cdots \right)$$

$$A_{53} = \frac{15}{16}\left(\Gamma^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^4 \left[\gamma^2\mu^2 + \Gamma\gamma\cos\varphi\,\mu^3 \right] +$$

Citons les valeurs numériques suivantes :

$I_{11} = 0,79$

$I_{22} = 5,16$

$I_{33} = 40,7$

$I_{44} = 198$

$I_{55} = 1310$

$I_{66} = 12.100$

$I_{53} = 220$

L'ensemble des valeurs $I_{p,q}$ calculées sont données sur les abaques (I),(II) et (III).

Remarque sur le calcul d'intégrales collisionnelles :

a) Le calcul numérique des intégrales $\mathcal{J}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}$ s'est avéré fort pénible.Or dans la théorie cinétique des gaz on tombe généralement assez souvent sur des expressions similaires,dites intégrales du type de Chapman et Cowling.

La difficulté provient de l'opérateur collisionnel noté $\int_0^{2\pi} d\varepsilon\ \delta_\epsilon$ par ces auteurs.

Si nous connaissions les valeurs propores et les fonctions propores de cet opérateur tout s'éclaircirait singulièrement.

Or dans [1] 10.321 .... (9) p.176 nous lisons :

$$\int_0^{2\pi} d\varepsilon\ \delta_\epsilon \left(\vec{\vec{g}}\vec{g}\right) = 3\pi \left(1 - \cos^2\chi\right) \vec{\vec{g}}\vec{g}$$

Il apparait bien ici que $\overrightarrow{\overrightarrow{gg}}$ est une fonction propre de cet opérateur, $3\pi(1-\cos^2\chi)$ étant la valeur propre associée.

Même chose dans [1] 10.321 ... (8) p.176/

Dans l'hypothèse Lorentzienne([1], 10.5.... p.188) nous trouvons :

$$\iint C(\vec{C}_2 - \vec{C}_2')\, c_2\, b\,db\,d\varepsilon = 2\pi\, \vec{C}_2 \int (1-\cos\chi)\, c_2\, b\,db$$

ainsi que :

$$\iint \left(\overrightarrow{\overrightarrow{C_2 C_2}} - \overrightarrow{\overrightarrow{C_2' C_2'}}\right) c_2\, b\,db\,d\varepsilon = 3\pi\, \overrightarrow{\overrightarrow{C_2 C_2}} \int (1-\cos^2\chi)\, c_2\, b\,db$$

Ainsi les expressions $(1-\cos\chi)$, $(1-\cos^2\chi)$ et peut-être même plus généralement $(1-\cos^\ell\chi)$ ont elles le caractère de valeurs propres d'opérateur.

Dans le cas qui nous intéresse les intégrales $\mathcal{I}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ ont trait à des collisions coulombiennes (électron-électrons).Plus généralement,si la loi de force est en $r^{-\nu}$ les expressions $\phi^{(\ell)}_{12}$ définies dans [1] 9.33 ...(2) p.157 , et qui interviennent dans les calculs de théorie cinétique,diffèrent alors entre elles d'un simple facteur numérique $A_\ell(\nu)$.

Si les valeurs propres de l'opérateur δ_ϵ sont du type $(1-\cos^\ell\chi)$ il y a alors unicité puisque ces expressions sont des multiples de

$$\int (1-\cos\chi)\, b\,db\,d\varepsilon$$

On connait d'autres fonctions propres qui sont les invariants collisionnels $\psi^{(i)}$,qui sont en quelque sorte des fonctions propres associées à des valeurs propres nulles.

Soit une intégrale du type de Chapman et Cowling :

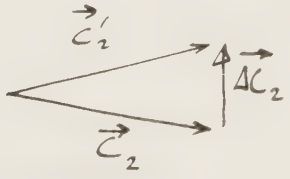
$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}]_2$$

Il est bien évident que si nous pouvions disposer d'une série de fonctions propres $\mathcal{S}^i$ qui nous permette d'écrire :

$$\mathcal{B} = \sum_i a_i \mathcal{S}^i$$

le travail serait grandement simplifié .Mais cela,comme dirait Kipling, est une autre histoire....

b) Les collisions coulombiennes (long range encounters)sont en majorité des collisions de faible déflexion χ .Dans une approximation assez grossière on peut supposer que la variation du module de la vitesse électronique est du second ordre devant la variation de la direction de cette vitesse,soit :



$$\frac{\vec{\Delta c}_2}{|\vec{c}_2|} \ll \sqrt{\frac{\Delta(c_2^2)}{c_2^2}}$$

$\sigma^{(2)}$ devient de l'ordre de :

$$-\frac{e^2}{3kT}\int f^0 \frac{c^2}{\nu^2}(1-\cos\chi)\, n_e\, g\, \vec{dc}$$

avec : $$n_e(1-\cos\chi)\, g = \nu_{ee} = \frac{\sqrt{2}}{2}\nu_{ei}$$

$$\sigma^{(2)} \simeq -\frac{4\pi e^2}{3kT}\int_0^\infty f^0 \frac{c^4 \nu_{ee}}{(\nu_{en}+\nu_{ei})^2}\, dc$$

En totalement ionisé cette expression approchée conduit à :

$$\sigma^{(2)} = -\,0{,}707\ \sigma^{(1)} \qquad \text{soit : } \gamma_E \simeq 0{,}3 .$$

La parenté avec le résultat (88) obtenu avec l'opérateur de Krook s'obtient aisément. En effet nous avions :

$$\sigma = \frac{4\pi e^2}{3kT} \int_0^\infty \frac{f^\circ c^4}{(\nu_{en} + \nu_{ei} + \nu_{ee})}\, dc \qquad (38)$$

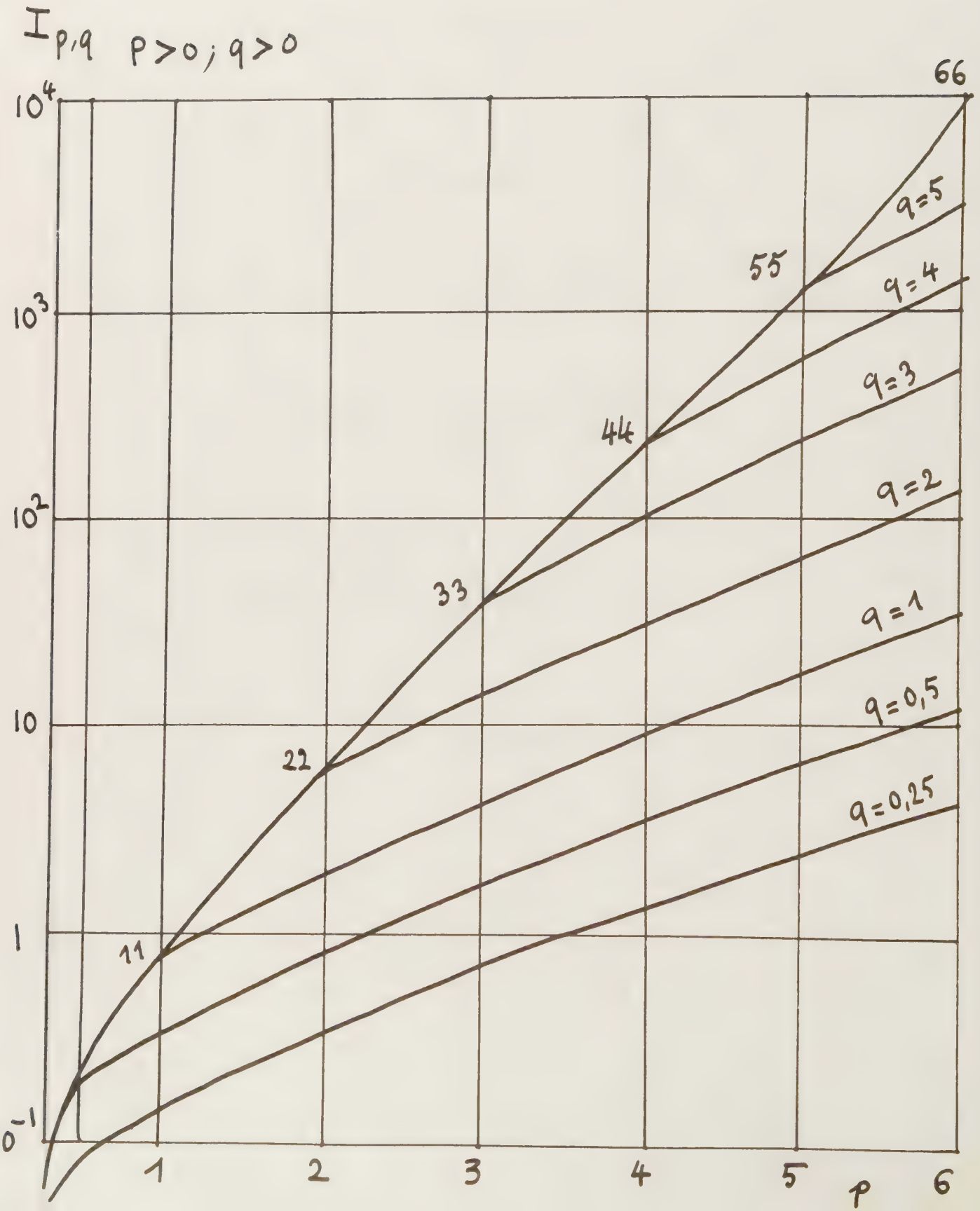
si $\dfrac{\nu_{ee}}{\nu_{en}+\nu_{ei}} \ll 1$ on peut écrire :

$$\frac{1}{\nu_{en}+\nu_{ei}+\nu_{ee}} = \frac{1}{\nu_{en}+\nu_{ei}} - \frac{\nu_{ee}}{(\nu_{en}+\nu_{ei})^2} + \text{etc} \ldots$$

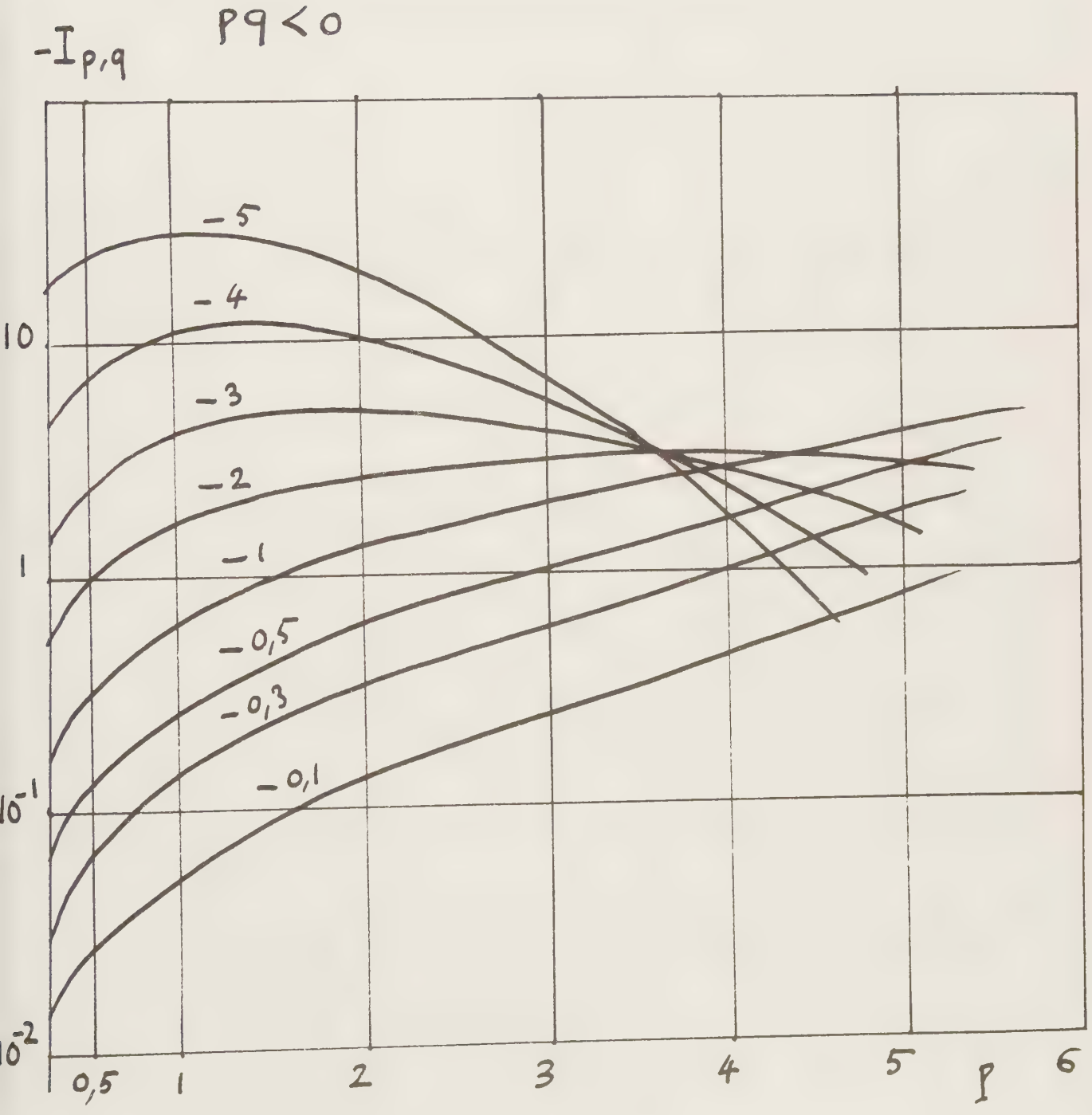
soit $$\sigma = \sigma^{(1)} - \frac{4\pi e^2}{3kT} \int_0^\infty \frac{f^\circ c^4\, dc\, \nu_{ee}}{(\nu_{en}+\nu_{ei})^2} + \text{etc} \ldots$$

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

ABAQUE I :

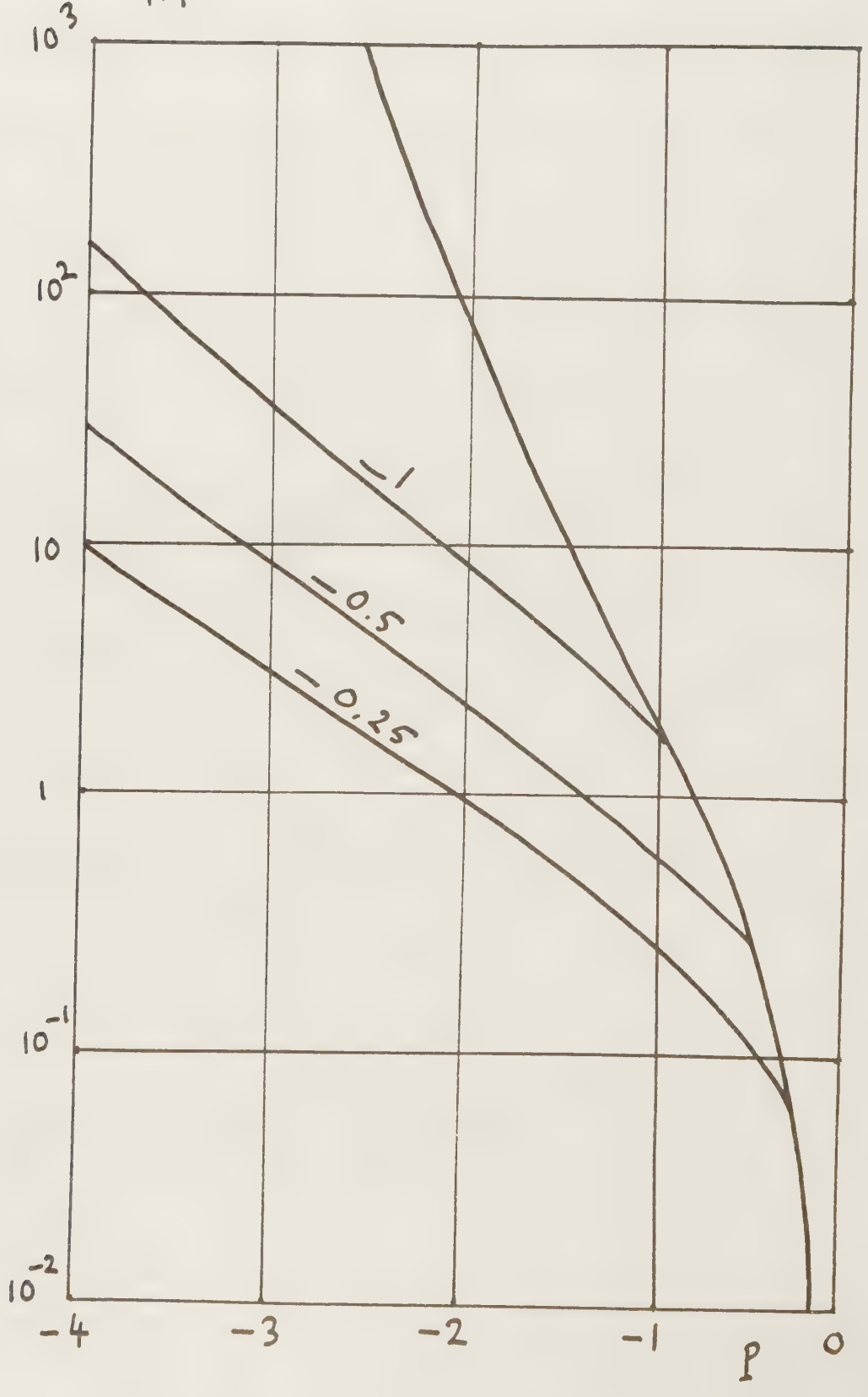

$I_{p,q}$ $p>0$; $q>0$
66
55
44
33
22
11
10^4
10^3
10^2
10
1
10^{-1}
q=5
q=4
q=3
q=2
q=1
q=0,5
q=0,25
1
2
3
4
5
6
p

ABAQUE II



ABAQUE III

$p<0$; $q<0$



BIBLIOGRAPHIE RELATIVE AU CHAPITRE I :

[1] S.CHAPMAN & T.G.COWLING :
The mathematical theory of non-uniform gases.
Cambridge University Press 1958.

[2] L.SPITZER & R.HARM :
Transport phenomena in a completely ionized gas.
Phys.Review Vol.89 1°March 1953.

[3] R.S.DEVOTO :
Transport coefficients of partially ionized argon.
Phys.of Fluids Vol;10 n°2 Feb. 67. pp 354 - 364

[4] R.M.CHMIELSKI & FERZIGER :
Transport properties of a non-uniform partially ionized gas.
Phys.of Fluids Vol.10 n°2 Feb.67 pp 364 - 371

[5] L.SPITZER :
Physics of fully ionized gases.
Interscience publishers,Inc. New York 1956.

[6] A.A.VLASOV :
Many particles theory and its applications to plasmas.
Gordon and Breach Publishers,Inc.New York 1961.

[7] J.L.DELCROIX :
Introduction à la théorie des gaz ionisés.
Monographie Dunod,tome II . (1959)

[8] J.O.HIRSCHFELDER & C.F.CURTISS :
Molecular theory of gases and liquids.
John Wiley & sons Inc. New York 1954.

[9] BEN DANIEL & TAMOR :
General Electric Research Report n°62-RL(2922 E) January 6 .

[10] W.P.ALLIS :
Motions of ions and electrons.
Handbuch der Physik,Vol.21 Springer 1956 pp.384-444

[10'] SUTTON & SHERMAN :
Engineering magnetohydrodynamics
Mc Graw Hill Book Cie 1967.

[11] S.CHANDRASEKHAR :

Astrophysical Journal J.97,225,263 (1943).

[12] COHEN,SPITZER & ROUTLY :

The electrical conductivity of an ionized gas.
Phys.Review Vol.80 n°2 Oct.1950.

[13] S.SCHWEITZER & M.MITCHNER :

Electrical conductivity of a partially ionized gas in a magnetic field.
Physics of Fluids Vol.10 n°4 April 1967.

[14] [illegible] :

Calculation of electric conductivity of a ionized gas.
ARS Journal.June 1960.

[15] [illegible] :

Electrical conductivity of highly ionized argon produced by shock waves.
J.of Applied Physics Vol.26 n°1 January 1955.

[16] [illegible] :

Electrical conductivity of inert-gas seed combination in shock tubes.
Canadian Journal of Physics.Vol.42,August 1964.

[17] W.R.KRUGER,M.MITCHNER & U.DAYBELIE :

Transport properties of MHD generators plasmas.
AIAA Journal Vol.6 n°9 pp.1712-1723.

[18] PUNG NIEN HU & SIGI ZIERING :

Kinetic model for three-component plasma with ionization.
Phys.of Fluids Vol.9 n°10 Oct.1966.

[19] F.E.ROCKOL :

Transport equations for a partially ionized gas in a magnetic flield. NASA Rept.

[20] R.LANDSHOFF :

The convergence of the Chapman Enskog method for a completely ionized gas.
Phys.Rev.Vol.82 1951. p.442.

[21] I.P.SHKAROFSKY :

The particles kinetics of plasmas.
Addison Wesley,Cambridge Massachussets 1966.

[22] T.G.COWLING :

Electrical conductivity of a ionized gas in a magnetic flield and its applications to solar atmosphere and ionosphere.Proc.Royal Society Vol.A183 1945 p.453.

[23] P.L.BHATNAGAR , E.P.GROSS & M.KROOK :
"A model for collision processes in gases.Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems."
Phys. Review Volume 94 n°3 , May 1 1954.

[24] C.RAMSAUER & R.KOLLATH :
Ann. Physik 12 , 837 (1932).

[25] T.F.O'MALLEY :
Phys.Rev. 130, 1020 (1963).

[26] B.KIVEL :
Phys.Review 116; 926 (1959)

[27] S.WESTIN :
Kgl. Norske Videnskab., Selskabs Skrifter,n°2 (1946)

[28] L.S.FROST & A.V.PHELPS :
Phys.Review 136 ; 1538 (1964).

[29] J.LAU :
Canadian Journal of Physics 42 ; 1548 (1964)

[30] H.J.PAIN & P.R.SMY :
Journal of Fluids Mechanics 9;390 (1960) et 10;51 (1961).

Chapitre 2

APPLICATION DE LA THEORIE CINETIQUE
A L'ASTROPHYSIQUE :

INSTABILITE GRAVITATIONNELLE

" l'homme sait enfin qu'il est seul dans l'immensité
indifférente de l'Univers d'où il a émergé par nasard "

Jacques Monod

II.1) INTRODUCTION :

L'instabilité gravitationnelle a été découverte par Sir J.Jeans en 1902.Elle est le fait des systèmes qui se trouvent abandonnés à l'action déstabilisante de leur propre champ de gravité $\vec{g}$.

Soit un milieu initialement homogène,de densité n et de température translationnelle T .Plaçons en un point quelconque une surdensité δn .Celle-ci va générer un champ gravitationnel centripète $\vec{\delta g}$,qui entrainera l'accrétion de matière autour du point considéré.Inversement le mouvement d'agitation des particules qui constituent la perturbation δn tendra à les disperser dans tout l'espace.Il y a donc ici deux effets antagonistes.

On concluera que l'instabilité sera le fait de systèmes à forte densité et à faible vitesse d'agitation.

L'analyse de Jeans révèle que le critère de stabilité est à chercher dans la longueur d'onde de la perturbation.Si celle-ci est supérieure à une longueur critique L ,dite longueur de Jeans, le système sera instable.Si la longueur d'onde est inférieure,conclusion inverse.

En assimilant le phénomène à une perturbation Jeans établit que le potentiel doit satisfaire une équation au dérivées partielles.

Dans ce qui va suivre cette équation est réétablie par le truchement de la théorie cinétique des gaz.Une analyse non-linéaire est également donnée.

Le lien avec la loi de Hubble est mis en évidence.Un calcul d'ordre de grandeur assigne à l'Univers un "diamètre" compris entre 1,56 et 4,94 10^{10} Années lumières.

II.2) INSTABILITE GRAVITATIONNELLE D'UN MILIEU COLLISIONNEL :

Soit f la fonction de distribution décrivant un milieu constitué de particules identiques de masse m. Les paramètres macroscopiques s'en déduisent en vertu de :

$$\begin{cases} n = \int f(\vec{w})\, d\vec{w} & (1) \\ \vec{c}_0 = \frac{1}{n} \int \vec{w}\, f(\vec{w})\, d\vec{w} & (2) \\ \frac{3}{2} kT = \frac{1}{n} \int \frac{1}{2} m\, (\vec{w} - \vec{c}_0)^2 f(\vec{w})\, d\vec{w} & (3) \end{cases}$$

II.2 A) SOLUTION LINEAIRE :

En supposant ce milieu assez proche de l'état maxwellien, écrivons :

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} \qquad (4)$$

ceci tel que $f^{(0)}$ soit maxwellienne et que : $\int \psi^{(1)} f^{(1)} d\vec{w} = 0$ (5)

(Nous dirons que la fonction $f^{(1)}$ génère des moments nuls).

Situons maintenant f dans un espace fonctionnel Ξ muni d'une base (ε). Soit $\Xi^{(0)}$ l'ensemble des fonctions maxwelliennes et $\Xi^{(1)}$ l'ensemble des fonctions $f^{(1)}$ obéissant à (5).

Dans l'hypothèse où f peut être représentée par (4) nous utiliserons la représentation ci-après :

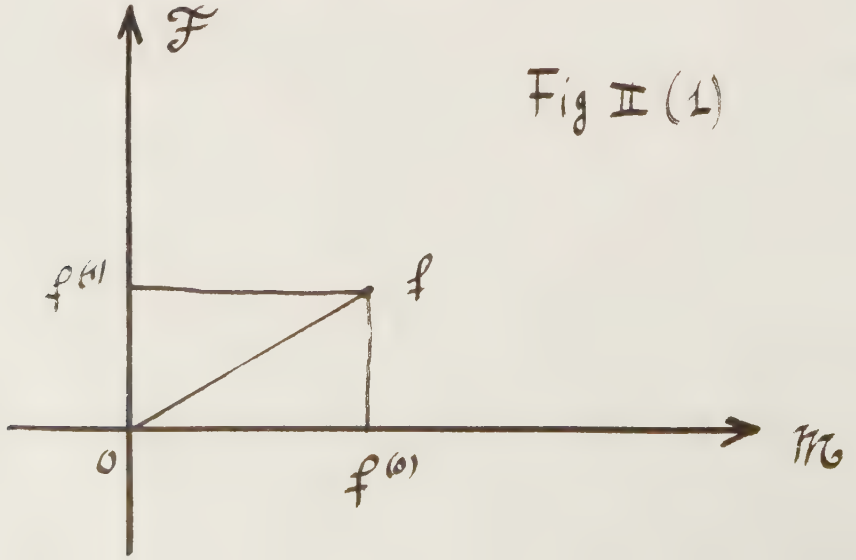


Fig II (1)

L'axe $\overrightarrow{Om}$ représente l'ensemble $\mathcal{E}^{(o)}$ .Un point de cet axe est donc repèré par un ensemble n, T, C_o .
L'axe $\overrightarrow{OF}$ représente l'ensemble $\mathcal{E}^{(1)}$ .Dans une optique perturbationnelle appelons $f_o^{(o)}$ une fonction maxwellienne uniforme à l'instant initial.Soient $\delta^o f$ et $\delta^1 f$ les projections de la perturbation δf sur $\overrightarrow{Om}$ et $\overrightarrow{OF}$.

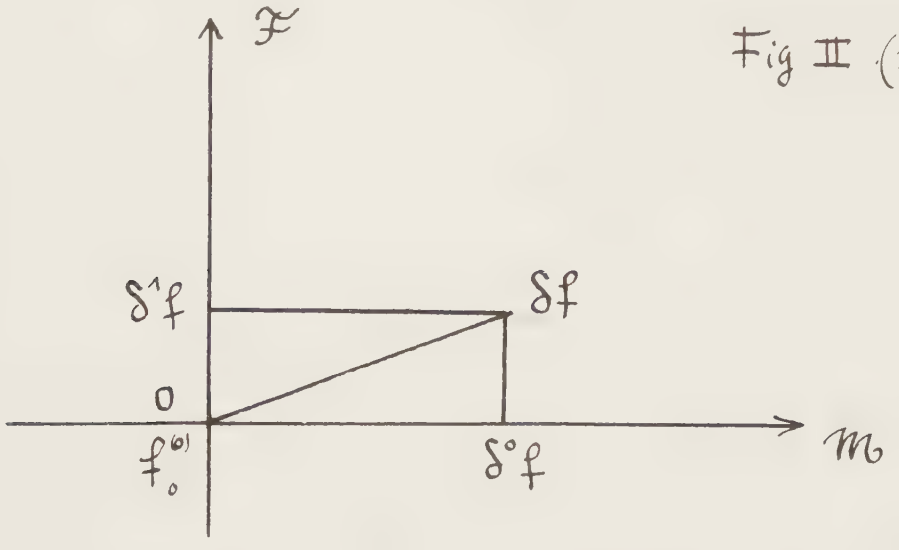


Fig II (1) BIS.

Nous allons associer δf au mécanisme de l'instabilité gravitationnelle.Supposons le milieu collisionnel.La fonction de distribution obéira à l'équation de Boltzmann rendue " self consistent " :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial_e f}{\partial t} \qquad (6)$$

où :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\vec{\partial}}{\partial r} + \vec{g} \cdot \frac{\vec{\partial}}{\partial w} \qquad (7)$$

et où $\frac{\partial_e f}{\partial t}$ représente la variation de f du fait des collisions. ("e" pour encounters). $\delta^o f$ et $\delta^1 f$ sont évidement couplés.
On remarquera que :

$$\frac{\partial_e \left(f_o^{(o)} + \delta^o f \right)}{\partial t} = 0 \qquad (8)$$

Puisque $f_o^{(0)} + \delta^o f$ est maxwellienne..Nous avons, de part le choix de $\delta^o f$:

$$\delta^o f = \frac{\partial f_o^{(0)}}{\partial n}\delta n + \frac{\partial f_o^{(0)}}{\partial T}\delta T + \frac{\overrightarrow{\partial f_o^{(0)}}}{\partial C_o}\cdot\overrightarrow{\delta C_o} \quad (9)$$

Cherchant à évaluer $\delta^1 f$ nous introduirons d'abord la perturbation $\delta^o f$ dans l'équation de Boltzmann .

Soit :

$$\begin{cases} \delta n\,(\vec{r},t) \\ \delta T\,(\vec{r},t) \\ \overrightarrow{\delta C_o}\,(\vec{r},t) \end{cases} \quad (10)$$

la solution qui en découle.Calculons la perturbation $\delta^1 f$ à l'aide de ces données et pour ce faire utilisons la solution de Grad (*) :

$$\delta^1 f = A\left(\frac{mc^2}{2kT} - \frac{5}{2}\right)\left(\vec{C}\cdot\frac{\overrightarrow{\partial \log T}}{\partial r}\right) + B\,\overrightarrow{\overrightarrow{CC}} : \frac{\overrightarrow{\overrightarrow{\partial C_o}}}{\partial r} \quad (11)$$

Nous aurons :

$$\begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{\partial \log T}}{\partial r} = \dfrac{1}{T}\dfrac{\overrightarrow{\partial \delta T}}{\partial r} \quad \left(\dfrac{\overrightarrow{\partial T_o}}{\partial r} = 0\right) & (12) \\ \dfrac{\overrightarrow{\overrightarrow{\partial C_o}}}{\partial r} = \dfrac{\overrightarrow{\partial \overrightarrow{\delta C_o}}}{\partial r} & (13) \end{cases}$$

Nous verrons plus loin que la solution $f_o^o + \delta^o f$ entraine :

$$\frac{\overrightarrow{\partial \delta T}}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{\delta C_o} = \overrightarrow{\delta\omega \times r} - \frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial t}\vec{r} \quad (14)$$

(*) Cette solution consiste à évaluer au premier ordre la variation de la fonction de distribution le long d'un libre parcours.

On voit que : $\overrightarrow{\overrightarrow{CC}} : \frac{\partial \overrightarrow{C_0}}{\partial r} = 0$ (16)

Ce qui entraine : $\delta' f = 0$

Ainsi une solution : $\begin{cases} f^\circ + \delta^\circ f \\ \delta' f = 0 \end{cases}$ (17) est envisageable.

La solution de Grad (normale) suppose que le temps de relaxation de la fonction de distribution τ (de l'ordre du temps de collision) est faible devant le temps caractéristique θ associé à l'instabilité (temps de Jeans),qui traduit l'évolution des paramètres macroscopiques.

Signification physique :

Ceci peut permettre d'aborder l'analyse des perturbations gravitationnelles dans un milieu fortement collisionnel,initialement au repos et maxwellien.

Explicitons le calcul :

$$\begin{cases} \log f = \log n - \frac{3}{2}\log T - \frac{m(\vec{W}-\vec{C_0})^2}{2kT} & (18) \\ \frac{\partial \vec{T}}{\partial r} = 0 \qquad \vec{C_0} = 0 & (19) \end{cases}$$

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{\delta^\circ f}{f} = \frac{\delta n}{n} - \frac{3}{2}\frac{\delta T}{T} + \frac{m}{kT}\vec{W}.\delta\vec{C_0} + \frac{m}{2kT^2}(\vec{W}-\vec{C_0})^2 \delta T \qquad (20)$$

$\vec{W}$,vitesse d'une particule par rapport à un trièdre fixe,se confond avec $\vec{C}$, vitesse résiduelle,puisque $\vec{C_0} = 0$

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{\delta n}{n} - \frac{3}{2}\frac{\delta T}{T} + \frac{m}{kT}\vec{C}.\delta\vec{C_0} + \frac{m}{2kT^2}C^2\delta T \qquad (21)$$

L'équation de Boltzmann donne :

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \vec{c} \cdot \frac{\partial \vec{\delta f}}{\partial r} + \vec{\delta g} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial c} = 0 \qquad (22)$$

attendu que : $\vec{g}^{\circ} = 0$

$$\vec{\delta g} = - \frac{\partial}{\partial r} \overrightarrow{\delta \psi} \qquad (23)$$

$\delta \psi$ étant le potentiel de perturbation.

Introduisant (20) dans (22) il vient :

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{1}{T} \left(\frac{m c^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \frac{m}{kT} \vec{c} \cdot \frac{\partial \vec{\delta c}}{\partial t} \\ + \frac{1}{n} \frac{\partial \vec{\delta n}}{\partial r} \cdot \vec{c} + \frac{1}{T} \left(\frac{m c^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \frac{\partial \vec{\delta T}}{\partial r} \cdot \vec{c} \\ + \frac{m}{kT} \vec{c}\vec{c} : \frac{\partial \vec{\delta c}}{\partial r} + \frac{m}{kT} \vec{c} \cdot \frac{\partial \vec{\delta \psi}}{\partial r} = 0 \end{cases} \qquad (24)$$

Cette équation doit être satisfaite quelles que soient u,v,w, composantes de la vitesse C , variable indépendante.

Termes d'ordre trois :

$$\frac{1}{T} \left(\frac{m c^2}{2kT} \right) \left(\vec{c} \cdot \frac{\partial \vec{\delta T}}{\partial r} \right) = 0 \qquad (25)$$

soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\delta T}}{\partial r} = 0}$$

Le phénomène est isotherme.

L'équation aux termes d'ordre deux s'écrit :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{CC}} : \left[\frac{1}{2T} \frac{\partial \delta T}{\partial t} \vec{u} + \frac{\partial \overrightarrow{\delta C_0}}{\partial z} \right] = 0 \qquad (26)$$

Il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \delta w_0}{\partial x} = \dfrac{\partial \delta v_0}{\partial y} = \dfrac{\partial \delta w_0}{\partial z} = -\dfrac{1}{2T} \dfrac{\partial \delta T}{\partial t} & (27) \\ \dfrac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \dfrac{\partial \delta v_0}{\partial x} = \dfrac{\partial \delta w_0}{\partial z} + \dfrac{\partial \delta w_0}{\partial x} = \dfrac{\partial \delta v_0}{\partial z} + \dfrac{\partial \delta w_0}{\partial y} & (28) \end{cases}$$

Ce système a la solution :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta C_0} = \overrightarrow{\delta \omega(t)} \times \vec{r} - \frac{1}{2T} \frac{\partial T}{\partial t} \vec{r}} \qquad (29)$$

Le champ de vitesse est la superposition d'une rotation en corps solide et d'un mouvement radial isotrope du type " loi de Hubble ".

Passons aux termes d'ordre un :

$$\frac{m}{kT} \frac{\partial \overrightarrow{\delta C_0}}{\partial t} + \frac{1}{n} \frac{\partial \overrightarrow{\delta n}}{\partial z} + \frac{m}{kT} \frac{\partial \overrightarrow{\delta \Psi}}{\partial z} = 0 \qquad (30)$$

Les termes d'ordre zéro donnent :

$$\frac{1}{n} \frac{\partial \delta n}{\partial t} - \frac{3}{2T} \frac{\partial \delta T}{\partial t} = 0 \qquad (31)$$

ou :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\delta \log \frac{n}{T^{3/2}} \right) = 0} \qquad (32)$$

On retrouve l'adiabaticité. La conservation de la masse permet d'écrire :

$$\frac{1}{n}\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\vec{\partial}}{\partial z}\cdot\vec{\delta C_0} = 0 \qquad (33)$$

Multiplions l'équation (30) par $\frac{\vec{\partial}}{\partial z}$,en tenant compte de (33) il vient :

$$-\frac{m}{kT}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial \delta n}{\partial t}\right) + \frac{1}{n}\Delta\delta n + \frac{m}{kT}\Delta\delta\Psi = 0 \qquad (34)$$

En posant : $$L^2 = \frac{kT}{4\pi G n m^2} \qquad (35)$$

et en introduisant la loi de Poisson :

$$\Delta\delta\Psi = 4\pi G m \delta n \qquad (36)$$

Il vient aisément :

$$\Delta\left\{\Delta\delta\Psi + \frac{\delta\Psi}{L^2} - \frac{m}{kT}\frac{\partial^2\delta\Psi}{\partial t^2}\right\} = 0 \qquad (37)$$

avec la solution :

$$\boxed{\Delta\delta\Psi + \frac{\delta\Psi}{L^2} - \frac{m}{kT}\frac{\partial^2\delta\Psi}{\partial t^2} = 0} \qquad (38)$$

On retrouve ici l'équation de Jeans [1] ,établie ici à l'aide de la théorie cinétique des gaz.

II.2 B)

SOLUTION NON-LINEAIRE :

Nous pouvons alors envisager de passer à une situation non perturbationnelle en cherchant cette fois les solutions maxwelliennes instationnaires de l'équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial \log f^\circ}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial \log f^\circ}}{\partial z} + \vec{g} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial \log f^\circ}}{\partial w} = 0 \qquad (39)$$

$$\log f^\circ = \log n - \frac{3}{2} \log T - \frac{m c^2}{2kT} \qquad (40)$$

Nous écrirons pour ce faire l'équation (39) en termes de vitesse particulaire :

$$\frac{\partial \log f^\circ}{\partial t} + \vec{c} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial \log f^\circ}}{\partial z} + \vec{c}_0 \cdot \frac{\overrightarrow{\partial \log f^\circ}}{\partial z} + \left(\vec{g} - \frac{\vec{D c_0}}{Dt} \right) \cdot \frac{\overrightarrow{\partial \log f^\circ}}{\partial c}$$

$$- \frac{\overrightarrow{\overrightarrow{\partial \log f}}}{\partial c} c : \frac{\overrightarrow{\overrightarrow{\partial c_0}}^{\circ}}{\partial z} = 0 \qquad (41)$$

avec : $\vec{g} = - \frac{\overrightarrow{\partial \Psi}}{\partial z}$

L'introduction de (40) dans (41) entraine tout d'abord que :

$$\boxed{\frac{\overrightarrow{\partial T}}{\partial z} = 0} \qquad (42)$$

Le phénomène est donc encore isotherme.

On a :

$$\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{3}{2T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{n}\vec{C_0}\cdot\frac{\partial \vec{n}}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{n}\vec{C}\cdot\frac{\partial \vec{n}}{\partial \vec{r}}$$

$$+ \frac{m}{kT}\left(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{r}} + \frac{D\vec{C_0}}{Dt}\right)\cdot\vec{C} + \frac{m}{2kT^2}C^2\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{m}{kT}\overrightarrow{\overrightarrow{CC}}:\frac{\partial \vec{C_0}}{\partial \vec{r}} = 0 \qquad (43)$$

L'identification sur les termes d'ordre deux conduit à :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{CC}} : \left[\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial t}\vec{\vec{U}} + \frac{\partial \vec{C_0}}{\partial \vec{r}}\right] = 0 \qquad (44)$$

Ce qui conduit comme précédement à :

$$\boxed{\vec{C_0} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r} - \frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial t}\vec{r}} \qquad (45)$$

Il y a donc superposition d'une rotation en corps solide instationnaire et d'un mouvement d'expansion ou de récession radial isotrope proportionnel à la distance à l'origine des coordonnées.

Si $\frac{\partial T}{\partial t} < 0$ il y a expansion

Si $\frac{\partial T}{\partial t} > 0$ il y a récession.

Analysons le cas ou la rotation est absente. Le champ de vitesse

$$\vec{C_0} = -\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial t}\vec{r} \qquad (46)$$

présente une propriété très intéressante : il est indépendant du choix de l'origine des coordonnées. On retrouve là la <u>loi de Hubble</u>.

Dans notre système en instabilité gravitationnelle un observateur situé en un point quelconque de l'espace "verra" le champ de vitesse de Hubble, correspondant à l'expansion (la décompression) isotrope d'un Univers constitué de particules de même masse m et collisionnel.

Les termes d'ordre un donnent :

$$\frac{1}{n}\frac{\partial \vec{n}}{\partial \vec{r}} + \left(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{D}\vec{G_0}}{Dt}\right)\frac{m}{kT} = 0 \qquad (47)$$

Les termes d'ordre zéro :

$$\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{3}{2T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{n}\vec{G_0}\cdot\frac{\partial \vec{n}}{\partial \vec{r}} = 0 \qquad (48)$$

qui peut s"écrire :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{G_0}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\left(\log\frac{n}{T^{3/2}}\right) = 0 \qquad (49)$$

ou:

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left(\frac{n}{T^{3/2}}\right) = 0} \qquad (50)$$

On retrouve l'adiabaticité du phénomène.

Deux situations conduisent à des résultats analytiques simples. Ce sont celles où le terme $\frac{\vec{D}\vec{G_0}}{Dt}$ peut se mettre sous la forme d'un gradient.

$$\frac{\vec{D}\vec{G_0}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\psi_0}}{\partial \vec{r}}$$

a) Cas instationnaire unidimensionnel : $(\omega = 0)$

$$\frac{\partial \vec{C_0}}{\partial t} + \vec{C_0} \cdot \frac{\partial \vec{C_0}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{\psi_0}}{\partial z} \qquad (51)$$

$$\text{si} \quad \psi_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \log \frac{1}{\sqrt{T}} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{1}{\sqrt{T}}\right)^2\right] r^2 \qquad (52)$$

il vient :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\log n + \frac{m}{kT}(\psi + \psi_0)\right] = 0 \qquad (53)$$

ou:

$$n = n_0 \, e^{-\frac{m}{kT}(\psi + \psi_0)} \qquad (54)$$

en introduisant la loi de Poisson :

$$\Delta \psi = 4\pi G m n \qquad (55)$$

il vient :

$$\boxed{\Delta \psi = 4\pi G m n_0 \, e^{-\frac{m}{kT}(\psi + \psi_0)}} \qquad (56)$$

équation à coupler avec :

$$\boxed{\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{1}{\sqrt{T}}\right) r \frac{\partial}{\partial z}\right]\left[\log \frac{n}{T^{3/2}}\right] = 0} \qquad (57)$$

b) Situation de régime permanent :

$$\vec{c_o} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \omega = ct$$

$$\vec{c_o} \cdot \frac{\vec{\partial n}}{\partial r} = 0 \tag{58}$$

Le vecteur gradient de densité coupe l'axe du système.

$$\vec{c_o} \cdot \frac{\vec{\partial c_o}}{\partial r} = \frac{\vec{\partial \psi_1}}{\partial r} \quad \text{avec } \psi_1 = \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) \tag{59}$$

Ce qui conduit à :

$$\Delta\psi = 4\pi G n_o m e^{-\frac{m}{kT}(\psi+\psi_1)} \tag{60}$$

résultat fourni par Chandrasekhar (1942)

Il est à noter enfin que les équations (56) et (60) peuvent aussi s'écrire sous forme intégrale (équations de Fredholm à noyau symétrique non-dégénéré) :

$$\begin{cases} \dfrac{m^2 G}{kT} \displaystyle\int \frac{n(\vec{r}')\,d\vec{r}'}{|\vec{r}'-\vec{r}|} + \log\frac{n}{n_o} = \psi_o & (61) \\[2ex] \dfrac{m^2 G}{kT} \displaystyle\int \frac{n(\vec{r}')\,d\vec{r}'}{(\vec{r}'-\vec{r})} + \log\frac{n}{n_o} = \psi_1 & (62) \end{cases}$$

Deux remarques :

I) Revenant à la situation a) essayons de linéariser l'équation (56) :

$$\Delta\psi + \frac{\psi}{L^2} = 4\pi G m n_0 \qquad (63)$$

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \log \frac{1}{\sqrt{T_0}} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{1}{\sqrt{T_0}} \right)^2 \right\} \qquad (64)$$

le second terme du crochet est à supprimer puisqu'il provient du terme quadratique : $\vec{C_0} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial C_0}}{\partial z}$

On retrouve l'équation de Jeans, du moins sous sa forme (37).

II) Reprenant un raisonnement du à Zwicky calculons les dimensions d'un système tel que le temps de propagation du champ de gravité à travers celui-ci devienne de l'ordre de grandeur du temps de Jeans, c'est à dire tel que

$$\frac{L}{c} = (4\pi G n m)^{-\frac{1}{2}} \qquad (65)$$

Si l'on admet une densité moyenne à travers l'Univers comprise entre 10^{-29} et 10^{-30} g/cm^{-3} on obtient :

$$1{,}56\ 10^{10} < L < 4{,}94\ 10^{10} \text{ Années lumière} \qquad (66)$$

Cette valeur se trouve être de l'ordre de grandeur de dimension assignée à l'Univers. Ce calcul semble mettre en évidence le lien entre le phénomène de l'instabilité gravitationnelle et les perspectives de la relativité générale.

II.3) CONCLUSION :

Spitzer se demandait si l'instabilité gravitationnelle,telle qu'elle avait été décrite par Jeans dès 1902,pouvait avoir un sens physique quelconque.Pourtant on a tout de suite songer à lui imputer la naissance des étoiles,comme par ailleurs celle des galaxies.Dans cette optique on retrouverait dans la distance intergalactique la distance de Jeans du milieu,avant l'apparition des galaxies.

On connait deux types d'étoiles : les vieilles et les jeunes. Pour les vieilles d'aucuns supposent qu'elles ont pu se former,comme des grumeaux de plus petite échelle,au moment même de la contraction qui donnait naissance à la galaxie.

Il semble bien que les galaxies continuent à former des étoiles à partir de leur gaz interstellaire résiduel.Mais de ce côté il y a un os: Au sens de Jeans le milieu interstellaire s'avère stable.Donc deux conclusions possibles : ou c'est un tout autre mécanisme qui sécrète les étoiles,ou il existe un phénomène qui déclenche le collapse gravitationnel,en donnant en quelque sorte le coup de pouce initial.

Beaucoup d'idées ont été avancées à ce sujet.On a invoqué l'effet du champ magnétique,de la pression de radiation.Nous nous rangeons à la théorie de W.W.Roberts Jr.(1970)qui impute ce déclenchement à la structure spirale elle-même.Ceci sera repris et développé dans le chapitre quatre qui traite précisément de ce problème.

L'analyse maxwellienne que nous avons donné ici fournit des précisions sur le champ de vitesse en montrant le lieu existant avec la loi de Hubble.

Les deux champs (vitesse et température) obtenus posent cependant des problèmes évidents de conditions aux limites.Il semble possible de considérer les solution obtenues comme des solutions asymptotiques valables dans des portions limitées de l'espace,de même,comme on le verra au chapitre trois que la solution maxwellienne convient pour le noyau galactique,lui-même partie d'un ensemble décrit par une solution élliptique plus générale .

Ces solutions pourraient alors être considérées comme valables pour décrire le comportement instable d'un nuage de gaz interstellaire suffisement auto-couplé par collisions.

A une toute autre échelle l'approche semble intéressante dans une perspective cosmologique.Il conviendrait alors de reprendre cette étude en se basant sur l'équation de Boltzmann généralisée :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{V}\frac{\partial f}{\partial \bar{P}} + \bar{g}\cdot\frac{\partial f}{\partial \bar{V}} + f\left(\frac{\partial}{\partial \bar{V}}\cdot\bar{g}\right) = 0 \qquad (67)$$

ce que nous nous proposons de faire ultérieurement,si faire se peut..
(Référence : J.Merleau-Ponty : "Cosmologie du vingtième siècle".)

BIBLIOGRAPHIE :

[1] S.CHANDRASEKHAR :
Principles of stellar dynamics.(1942)
Dover Publications.

[2] Sir J.JEANS :
Astronomy and Cosmology (1961)
Dover Publications.

[3] P.LEDOUX :
"Prestellar evolution."
Structure and evolution of the galaxy,p.208
Astrophys.and Space Science Library.D.Reidel Publ. Cie .

Chapitre 3

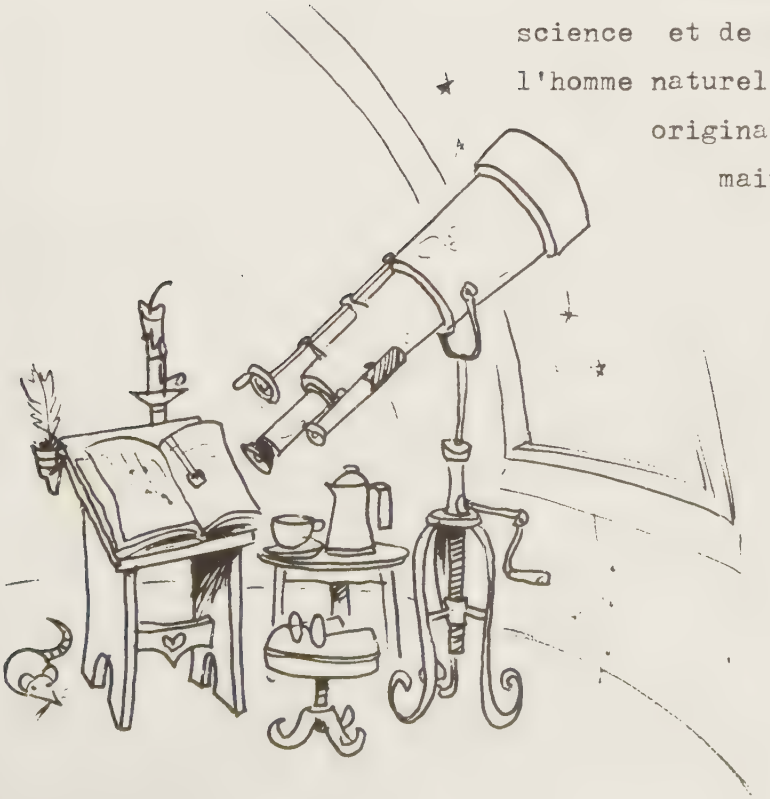
CONTRIBUTION A LA THEORIE CINETIQUE

DES MILIEUX NON COLLISIONNELS

MODELE TRIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE
DE SYSTEME STELLAIRE AUTOGRAVITANT.

" Les étoiles,la Galaxie,l'Univers,ne seront donc jamais qu'un décor immuable ; nul sans doute ne verra le soleil pâlir dans le lointain,ni se déformer peu à peu la grande figure d'Orion le chasseur.Toute l'épaisseur de science et de technique qui nous sépare de l'homme naturel n'a pas renversé cette relation originaire : l'homme voit ce que la main ne peut atteindre ..."

J.Merleau Ponty.



III.1) INTRODUCTION :

a) LES GALAXIES :

Elles sont constituées grosso-modo de trois populations

- Population I : Etoiles jeunes à faible dispersion de vitesse. concentrés au voisinage du plan de symétrie.
- Population II : Etoiles agées,a forte dispersion de vitesse, réparties dans le disque et le hâlo galactique.
- Population " Gaz interstellaire ".

Les galaxies elliptiques constituent plus de 90 % de la masse de l'Univers connu.Elles sont constituées principalement d'étoiles du type II et le gaz en est presque absent.

Les galaxies spirales contiennent de l'ordre de 10 % de leur masse en gaz interstellaire.Ce gaz est rassemblé à proximité immédiate du plan diamètral,formant un disque très applati.La distribution de ce gaz n'est pas homogène mais présente des condensations dont les plus importantes constituent la structure spirale elle-même. Dans ce type de galaxies les étoiles sont à 90 % de population II, les étoiles de population I étant surtout présentes dans les bras.

b) LES AMAS GLOBULAIRES :

Ils constituent des systèmes à symétrie sphérique,pratiquement exempts de gaz.

c) REDUCTION A UNE SEULE POPULATION :

Si l'on se propose d'étudier la dynamique des systèmes stellaires,comme les galaxies ou les amas globulaires il apparait raisonable en première approximation de négliger la présence du gaz et de réduire l'ensemble stellaire à la seule population II.On notera qu'à l'échelle d'une rotation galactique ces systèmes sont pratiquement non collisionnels et pourront être décrits par l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

On négligera toutes les forces autres que les forces gravitationnelles.

III.2) SOLUTION DU TYPE DE SCHWARSCHILD :

L'introduction d'une solution du type de Schwarschild, où Log f est un polynôme en u,v,w (composantes de la vitesse résiduelle) conduit à un système de vingt équations aux dérivées partielles qui a été étudié par Chandrasekhar (1942). Celui-ci est très complexe et l'auteur cité n'en a pu fournir qu'une solution bidimensionnelle. Il obtient ainsi une loi de vitesse du type :

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \rho^2/\rho_0^2} \qquad (2)$$

où $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

Nous nous proposons ici de rechercher une solution de Schwarschild à l'équation de Vlasov et d'en déduire des modèles tridimensionnels, instationnaires et self-consistent d'amas globulaires et de galaxies.

III.3) LES HYPOTHESES DE BASE DE NOTRE CALCUL :

Elles porteront essentiellement sur l'ellipsoïde des vitesses.

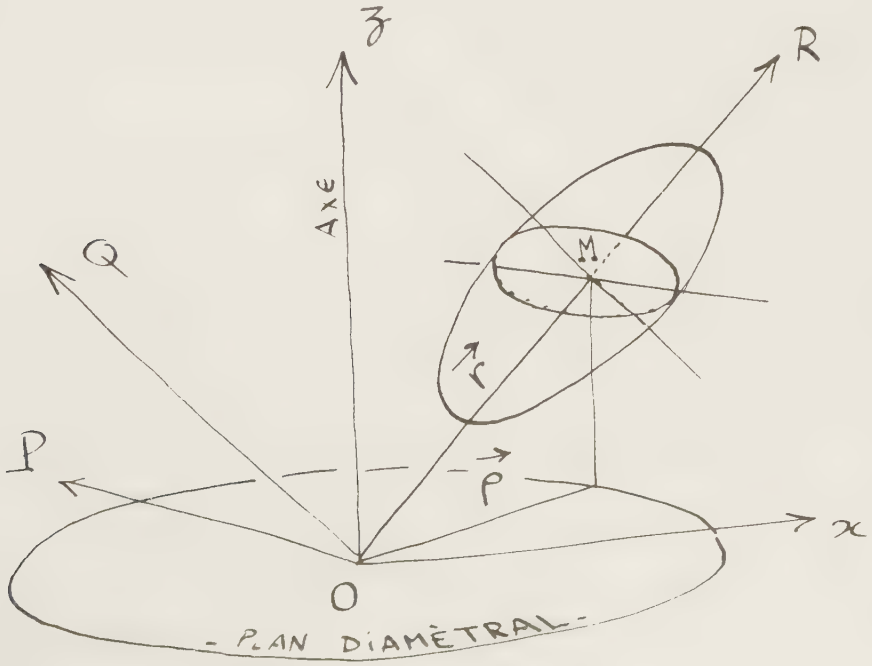


Fig III.(1)

Dans le cas des amas,où règnera la symétrie sphérique,la seule contrainte est que l'un des axes de l'ellipsoïde des vitesses passe par le centre du système.

Dans le cas des galaxies on y ajoutera,comme on le voit sur la figure I que le second axe de l'ellipsoïde soit orthogonal à l'axe oz du système et au vecteur position r , le troisième complètant le trièdre trirectangle.

Ces hypothèses sont le fruit de l'intuition.Pour les galaxies si l'on excepte le phénomène connu du vertex,elles ne sont pas irrecevables.

III .4) METHODE DE CALCUL,CHOIX DES AXES :

L'ensemble stellaire est constitué par une seule population,l'élément ayant pour masse m .

$\vec{W}$ est la vitesse d'une étoile par rapport à un repère fixe.

$\vec{C_o}$ est la vitesse macroscopique,définie par :

$$\vec{C_o} = \frac{1}{n} \int \vec{W} f(\vec{w}) \, d\vec{w} \qquad (3)$$

$\vec{C} = \vec{W} - \vec{C_o}$ est la vitesse résiduelle stellaire.

Soient $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ un système d'axes parrallèles aux axes de l'ellipsoïde définis plus haut (voir Figure I).Les projections de C dans ce repère seront appellées :

$$C_r \, , \, C_p \, , \, C_q$$

Si nous explicitons notre hypothèse nous écrirons que :

$$\log f = \log A - R C_r^2 - P C_p^2 - Q C_q^2 \qquad (4)$$

Les fonctions R , P, Q , A dépendent à priori du temps et de l'espace. f , fonction de distribution de vitesse des étoiles doit satisfaire l'équation de Vlasov,que nous écrirons en termes de vitesse résiduelle :

$$\frac{\partial \log f}{\partial t} + \vec{C} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \log f}{\partial r}} + \vec{C}_0 \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \log f}{\partial r}} + \left(\vec{g} - \overrightarrow{\frac{D\vec{C}_0}{Dt}} \right) \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \log f}{\partial C}} - \overrightarrow{\overrightarrow{\frac{\partial \log f}{\partial C}}} : \overrightarrow{\overrightarrow{\frac{\partial C_0}{\partial r}}} = 0 \qquad (5)$$

Les notations sont celles de l'ouvrage de Chapman et Cowling [3]. Introduisons la solution (4) dans (5).On obtient une expression du troisième degré qui devra être satisfaite quelles que soient les composantes u,v,w de la vitesse résiduelle,variable indépendante.

REMARQUE :

On ne trouvera dans le chapitre que les étapes fondamentales du calcul.Les intermédiaires sont donnés dans l'annexe qui fait suite, Ceci afin de ne pas alourdir l'exposé.

On obtiendra donc :

Une équation pour l'ordre trois
Trois pour l'ordre un
Six pour l'ordre deux
Dix pour l'ordre trois.

Soit un total de vingt équations aux dérivées partielles où les fonctions inconnues sont les paramètres macroscopiques.

Remarquons tout d'abord que (4) peut s'écrire :

$$\log f = \log A - \frac{m C^2}{2kH} + a (\vec{C}.\vec{r})^2 + \alpha \left[\vec{C} . (\vec{k} \times \vec{r}) \right]^2$$

$\vec{k}$ étant le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{oz}$

H , a et α étant à priori fonction du temps et de l'espace.

A étant le facteur de normalisation.

Pour la commodité du calcul il est indiqué d'exprimer C en le référant au trièdre (u,v,w) colinéaire au trièdre (x,y,z) , ceci afin de profiter de la symétrie sur oz .

Ainsi :

$$\log f = \log A - \frac{m}{2kH}\left(u^2+v^2+w^2\right) + a\left(ux+vy+wz\right)^2 + \alpha\left(vx-uy\right)^2 \qquad (7)$$

Les termes d'ordre trois fournissent :

$$(u^3) \rightarrow -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + x^2\frac{\partial a}{\partial x} + 2ax + y^2\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \qquad (8)$$

$$(v^3) \rightarrow -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + y^2\frac{\partial a}{\partial y} + 2ay + x^2\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \qquad (9)$$

$$(w^3) \rightarrow -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + z^2\frac{\partial a}{\partial z} + 2az = 0 \qquad (10)$$

$$(u^2v) \rightarrow -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + x^2\frac{\partial a}{\partial y} + 2ay + y^2\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \qquad (11)$$

$$(v^2u) \rightarrow -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + y^2\frac{\partial a}{\partial x} + 2ax + x^2\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \qquad (12)$$

$$(u^2w) \rightarrow -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + x^2\frac{\partial a}{\partial z} + 2az = 0 \qquad (13)$$

$$(w^2u) \rightarrow -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + z^2\frac{\partial a}{\partial x} + 2ax = 0 \qquad (14)$$

$$(w^2v^2) \rightarrow -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + y^2\frac{\partial a}{\partial z} + 2az = 0 \qquad (15)$$

$$(w^2 v) \rightarrow -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + z^2\frac{\partial a}{\partial y} + 2ay = 0 \qquad (16)$$

$$(uvw) \rightarrow xy\frac{\partial a}{\partial z} + xz\frac{\partial a}{\partial y} + yz\frac{\partial a}{\partial x} - 2xy\frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \qquad (17)$$

Ce système admet pour solution :

$$\overrightarrow{\frac{\partial a}{\partial r}} = 0 \qquad (18)$$

$$\overrightarrow{\frac{\partial \alpha}{\partial r}} = 0 \qquad (19)$$

$$H = \frac{T_o}{\left(1 + \frac{2akT_o}{m} r^2\right)} \qquad (20)$$

T_o n'étant fonction que du temps.

Cette solution n'est pas forcément la seule possible.

Il est commode de poser :

$$\frac{m}{2akT_o} = r_o^2 \qquad (21)$$

$$\frac{m}{2\alpha kT_o} = \rho_o^2 \qquad (22)$$

La fonction solution s'écrit :

$$f = n\left(\frac{m}{2\pi k T_o}\right)^{3/2}\left(1+\frac{r^2}{r_o^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{r^2}{r_o^2}-\frac{\rho^2}{\rho_o^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp-\frac{m}{2kT_o}\left\{C_r^2+C_p^2\left(1+\frac{r^2}{r_o^2}-\frac{\rho^2}{\rho_o^2}\right)+C_q^2\left(1+\frac{r^2}{r_o^2}\right)\right\} \quad (23)$$

III.5) DISPERSION DES VITESSES, TEMPERATURE TRANSLATIONNELLE :

Les dispersions des vitesses, projetées sur les trois axes $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$, s'écrivent

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{kT_o}{m}} \quad (24)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{kT_o}{m}}\left(1+\frac{r^2}{r_o^2}-\frac{\rho^2}{\rho_o^2}\right)^{-1/2} \quad (25)$$

$$\sigma_q = \sqrt{\frac{kT_o}{m}}\left(1+\frac{r^2}{r_o^2}\right)^{-1/2} \quad (26)$$

Lorsque $\begin{cases} r \ll r_o \\ \rho \ll \rho_o \end{cases}$ (noyau galactique).

Les **trois dispersions** tendent vers la valeur commune : $\sqrt{\frac{kT_o}{m}}$

et la fonction f vers la maxwellienne.

La température translationnelle se définit par :

$$\frac{3kT}{m} = \sigma_r^2 + \sigma_p^2 + \sigma_q^2 \quad (27)$$

Ainsi dans le noyau elle est égale à T_o .
Lorsque $|\vec{r}|$ tend vers l'infini le milieu n'offre plus qu'un seul degré de liberté radial et la température translationnelle tombe à $T_o/3$.(Voir à ce sujet la fin de ce chapitre : cohérence tridimensionnelle du modèle à l'infini.)

Ces conclusions s'étendront aisément aux amas en introduisant la symétrie sphérique ($\alpha = 0$).

Examinons maintenant les équations associées aux termes d'ordre deux :

$$\overline{(u^2)} \to -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{T_o}\right) - y^2\frac{da}{dt} - z^2\frac{da}{dt} + 2a x u_o + \frac{m}{kH}\frac{\partial u_o}{\partial x}$$

$$-\frac{m}{2k}\left[\vec{\zeta}_o \cdot \frac{\vec{\partial}}{\partial r}\left(\frac{1}{H}\right)\right] - 2a\left[x^2\frac{\partial u_o}{\partial x} + xy\frac{\partial v_o}{\partial x} + xz\frac{\partial w_o}{\partial x}\right]$$

$$+ 2\alpha y v_o + 2a y^2\frac{\partial u_o}{\partial x} - 2a xy\frac{\partial v_o}{\partial x} + y^2\frac{d\alpha}{dt} = 0$$

plus deux équations analogues (28)

$$\overline{(uv)} \to 2xy\left(\frac{da}{dt} - \frac{d\alpha}{dt}\right) + 2(a-\alpha)(y u_o + x v_o) + \frac{m}{kH}\left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x}\right)$$

$$-2(a+\alpha)xy\left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{\partial v_o}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial u_o}{\partial y}\left(\alpha y^2 - a x^2\right) + 2\frac{\partial v_o}{\partial x}\left(\alpha x^2 - a y^2\right) = 0$$

(29)

plus deux équations analogues.

III.6) LOI DE VITESSE :

Dans ce système introduisons, par pure intuition la solution :

$$\vec{C_o} = \vec{\omega(r)} \times \vec{r} + b\vec{r} \qquad (30)$$

où : $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Ceci signifiant que les points situés sur une sphère centrée en O ont même vitesse angulaire.

Le système est satisfait si :

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{2a}\frac{da}{dt} = b \quad ; \quad b = -\frac{1}{2T_o}\frac{\partial T_o}{\partial t} \qquad (31)$$

(ce qui entraine $\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{T_o}\right) = 0$ soit : r_o = constante).

et:

$$4a\omega + \frac{d\omega}{dr}\left[\frac{m}{kT_o}\frac{1}{r} + 2r(a+\alpha)\right] = 0 \qquad (32)$$

équation différentielle fournissant aussitôt la solution :

$$\omega = \frac{\omega_o}{\left[1 + \frac{2(a+\alpha)kT_o}{m} r^2\right]^{\frac{a}{a+\alpha}}} \qquad (33)$$

Cette relation donne toute une famille de courbes, définies par les paramètres :

$$\omega_o \quad ; \quad \frac{m}{2(a+\alpha)kT_o} = r_*^2 \quad ; \quad \frac{a}{a+\alpha} = \lambda$$

Si $\lambda = 1$ on retrouve la loi obtenue par Chandrasekhar (1942), mais cette fois en <u>tridimensionnel</u> .

Si $\lambda = \frac{3}{4}$ on obtient une loi de Brandt, exprimant que la rotation est Képlérienne à l'infini. Cette condition impliquant que :

a) $C \ll C_o$ loin du noyau

b) la masse de la galaxie puisse être considérée comme concentrée dans un volume restreint, que l'observateur situé au loin verra comme une masse ponctuelle.

Notons que la nullité de la vitesse à l'infini entraine que $\lambda \geq \frac{1}{2}$

Les courbes sont indiquées sur la figure II :

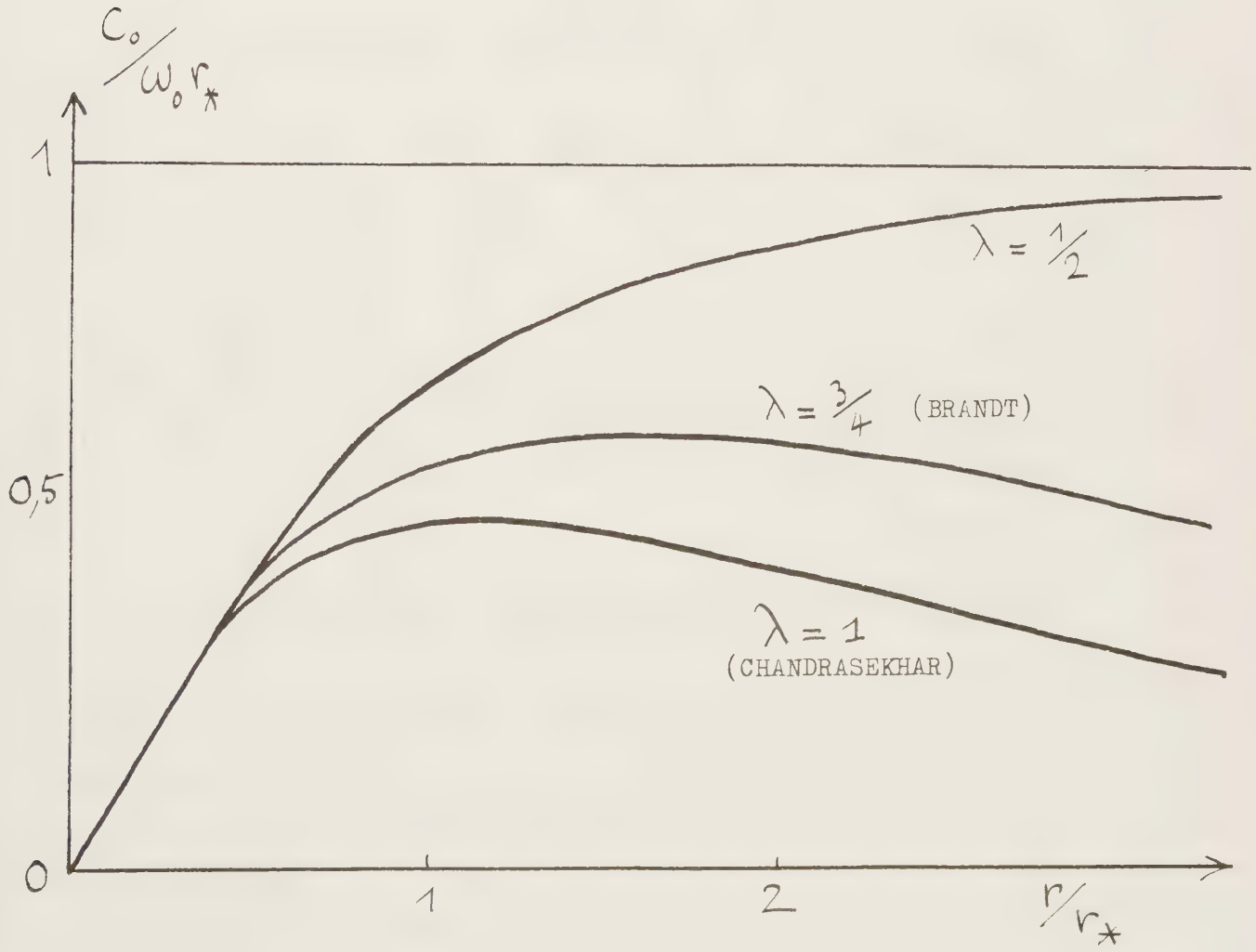


Figure III(2) : Courbes de rotation.

La relation (31) nous permet de compléter le champ instationnaire de vitesse :

$$\vec{c_o} = \vec{\omega(r)} \times \vec{r} - \frac{1}{2T_o} \frac{\partial T_o}{\partial t} \vec{r} \qquad (34)$$

$\omega(r)$ étant donné par la relation (33).

Ceci correspond à la superposition d'un mouvement de rotation différentielle et d'un mouvement radial isotrope proportionnel à la distance au centre galactique.la forme de ce champ radial fait qu'il sera perçu de manière identique par un observateur en tout point de notre système stellaire,ainsi que le champ de vitesse de Hubble.
Ceci traduit aussi le fait que :

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial r} \cdot \vec{c_o} = -\frac{3}{2T_o} \frac{\partial T_o}{\partial t} \qquad (35)$$

La divergence de la vitesse est la même en tout point du système et ne dépend que du temps.L'effondrement s'accompagne d'une élévation de la température translationnelle.Conclusion inverse pour l'expansion.

III.7) COHERENCE TRIDIMENSIONNELLE DU MODELE A L'INFINI :

Le titre même de ce paragraphe est sujet à remarque : sommes nous en droit de parler d'infini ?

Interrogeons nous d'abord sur le sens implicite de notre modèle. Nous avons particularisé un point de l'espace (le point O centre de notre système) en faisant par rapport à lui des hypothèses sur la géométrie de l'ellipsoïde des vitesses.

Cette procédure ne nous permet donc de traiter que le cas d'une galaxie ou d'un amas globulaire isolé,dans un espace Euclidien.Ce qui n'est pas conforme à la réalité physique:les amas globulaires sont parties intégrantes des galaxies,et les galaxies se constituent en amas plus ou moins lâches.

Nous avons vu que notre modèle induisait dans tout l'espace une anisotropie de la fonction de distribution et du champ de vitesse. Ce qui ne semble pas non plus physique.

Il semble possible de lever une telle contradiction.Considérons non plus un système stellaire isolé mais un ensemble de systèmes.

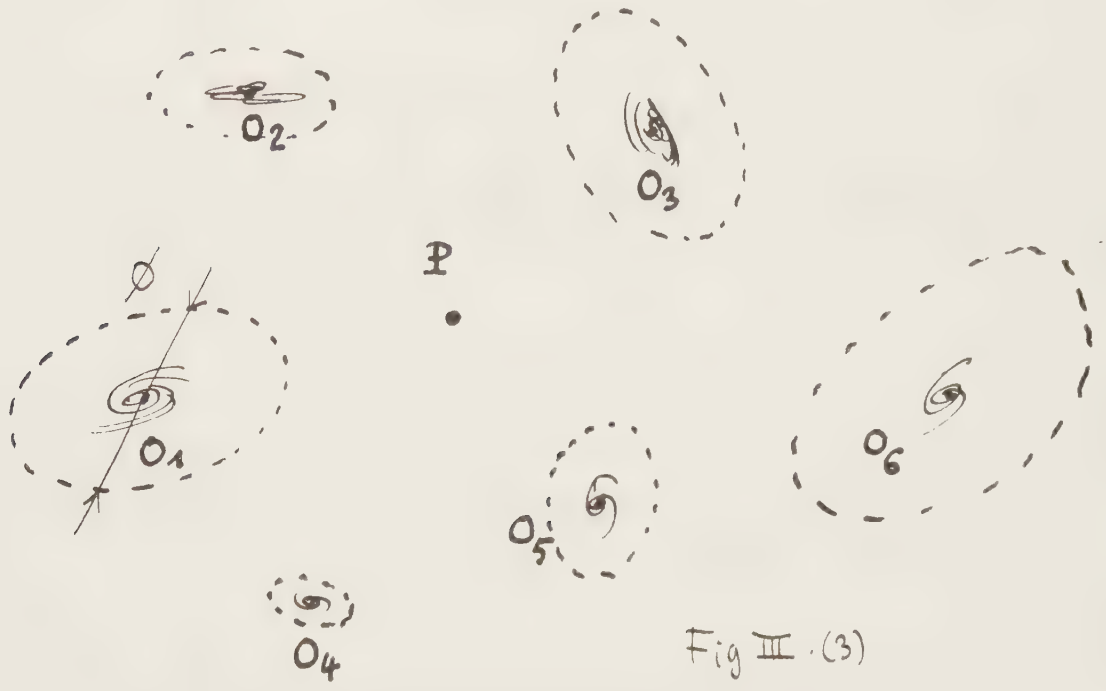


Fig III.(3)

Soient O_1 , O_2 , O_3 , etc... les centres de ces sytèmes.

Le champ gravitationnel existant au voisinage de O_1 peut être considéré comme une somme $\vec{g}_1 + \vec{g}'$, où $\vec{g}_1$ est la contribution du système (1) et g' la contribution des autres systèmes.Soit $\emptyset$ la longueur caractéristique associée au système (1) : ceci signifiant par exemple qu'au point r = $\emptyset/2$ le champ de gravité $\vec{g}$ est négligeable devant $\vec{g}_{max}$,valeur maximale dans ce même système.

Si $\emptyset$ est faible devant la distance moyenne intersystème on pourra considérer la solution en P comme la résultante des solutions individuelles générées par chacun des systèmes considérés isolément.

P étant un point situé en gros à distance comparable des systèmes voisins.Ces systèmes occupent par rapport à P des positions angulaires statistiquement quelconques.Soit d la distance moyenne inter-systèmes.On peut considérer également que P est situé en moyenne à d/2 des systèmes voisins.

La composition des solutions anisotropes issues de chacun des systèmes donne une solution isotrope en P,maxwellienne construite à partir d'une vitesse nulle et d'une température translationnelle qui se trouve être précisément T_o .

III.8) APPLICATION A LA GALAXIE :

Si l'on retient les chiffres donnés par Ogorodnikov (1965) pour les rapports mesurés de $\frac{\sigma_r}{\sigma_P}$ et de $\frac{\sigma_r}{\sigma_q}$ soit $\frac{8}{5}$ et 2 et si l'on situe le soleil au maximum de vitesse :

$$\frac{r_\odot^2}{r_*^2} = \frac{1}{2\lambda - 1}$$

on trouve pour λ une valeur proche de 3/4 ,ce qui signifie que la Galaxie devrait tourner suivant un mouvement de Brandt (rotation Képlérienne (à ~~l'infini~~) à la périphérie.

III.9) EQUATIONS AU POTENTIEL GRAVITATIONNEL :

Examinons maintenant l'équation correspondant à l'identification sur le terme d'ordre zéro :

$$\frac{\partial}{\partial t} + \vec{c_o} \cdot \frac{\vec{\partial}}{\partial r} \left\{ \log n - \log T_o \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{r^2/r_o^2}{\left(1 + r^2/r_o^2\right)} + \frac{1}{2} \frac{r^2/r_o^2 - \rho^2/\rho_o^2}{1 + \frac{r^2}{r_o^2} - \frac{\rho^2}{\rho_o^2}} \right] \right\} = 0$$

(36)

Au voisinage du noyau on retrouve l'adiabaticité, c'est à dire :

$$\frac{D}{Dt} \log \left(\frac{n}{T_o^{3/2}} \right) = 0 \qquad (37)$$

Loin du centre, cette loi devient :

$$\frac{D}{Dt} \log \left(\frac{n}{T_o^{5/2}} \right) = 0 \qquad (38)$$

Dans l'intervalle le coefficient de T_o croit régulièrement de 3/2 à 5/2 .

Pour tirer plus ample information nous devons maintenant nous reporter à l'équation vectorielle correspondant à l'identification sur les termes d'ordre un :

$$\left(\vec{g} - \frac{\overrightarrow{DC_o}}{Dt} \right) \cdot \frac{\overrightarrow{\partial \log f}}{\partial C} + \vec{C} \cdot \frac{\vec{\partial}}{\partial r} \left[\log n + \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{r^2}{r_o^2} \right) \left(1 + \frac{r^2}{r_o^2} - \frac{p^2}{p_o^2} \right) \right] = 0$$

(39)

Nous allons maintenant séparer ce qui correspond aux amas globulaires et ce qui correspond aux galaxies.

III.9.A) CAS DES AMAS GLOBULAIRES :

$\vec{C_o}$ est uniquement radial.

ω_o est nul.

La symétrie sphérique fait que : $\alpha = 0$

L'équation (39) s'écrit :

$$\left(\vec{g} - \frac{\overrightarrow{Dc_0}}{Dt}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{\partial \log f}}{\partial c} + \vec{c} \cdot \frac{\vec{\partial}}{\partial r}\left[\log n + \log\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)\right] = 0 \qquad (40)$$

où:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{c_0} \cdot \frac{\vec{\partial}}{\partial r} \qquad (41)$$

$$\vec{c_0} = \left[\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{1}{\sqrt{T_0}}\right] \vec{r} \qquad (42)$$

$$\frac{\overrightarrow{Dc_0}}{Dt} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\log \frac{1}{\sqrt{T_0}}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{1}{\sqrt{T_0}}\right)^2 \right\} \vec{r} \qquad (43).$$

$$\text{si} \quad \psi_0 = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\log \frac{1}{\sqrt{T_0}}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{1}{\sqrt{T_0}}\right)^2 \right\} \vec{r} \qquad (44)$$

$$\frac{\overrightarrow{Dc_0}}{Dt} = \frac{\overrightarrow{\partial \psi_0}}{\partial r} \qquad (45)$$

$$\frac{m}{kT_0} \frac{\partial}{\partial r}(\psi + \psi_0) + \frac{\partial}{\partial r}\left[\log n + \log\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)\right] = 0 \qquad (46)$$

$$n = \frac{n_0}{1 + \frac{r^2}{r_0^2}} e^{-\frac{m}{kT_0}(\psi + \psi_0)} \qquad (47)$$

En introduisant la loi de Poisson :

$$\Delta\psi = \frac{4\pi G m n_0}{1 + \frac{r^2}{r_0^2}} e^{-\frac{m}{kT_0}(\psi + \psi_0)} \qquad (48)$$

En situation stationnaire $\psi_0 = 0$ et on retrouve le modèle d'Eddington (1916). Cette équation est à coupler avec l'équation (38) qui s'écrit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2T_0}\frac{\partial T_0}{\partial t} r \frac{\partial}{\partial r}\right)\left[\log n - \left(3/2 + \frac{r^2/r_0^2}{1 + r^2/r_0^2}\right)\log T_0\right] = 0 \qquad (49)$$

Ces deux équations devraient nous permettre en principe l'etude du comportement spatio temporel des amas globulaires.

III.9 B) CAS DES GALAXIES :

Nous n'analyserons que la situation de régime permanent.

$$\vec{C}_0 \cdot \frac{\partial \vec{C}_0}{\partial r} = \omega^2 \vec{r} = \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \qquad (50)$$

$$\text{où } \psi_1 = -\omega_0^2 \left(\frac{a+\alpha}{a-\alpha}\right)\left(1 + \frac{r^2}{r_*^2}\right)^{-\frac{a-\alpha}{a+\alpha}} \qquad (51)$$

Dans le plan diamètral galactique cette équation s'écrit :

$$\Delta\psi = \frac{4\pi G m n_0}{\sqrt{\left(1+\frac{\rho^2}{r_0^2}\right)\left(1+\frac{\rho^2}{r_0^2}-\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right)}}\, e^{-\frac{m}{kT_0}(\psi+\psi_1)} \qquad (52)$$

III.10) EFFET D'ECRAN :

Considérons maintenant un gaz dont les éléments sont précisément des systèmes stellaires. Re-présentons cet amas de systèmes (par exemple un amas de galaxies) par une fonction de distribution f_G .

Supposons le système entièrement relaxé. Il y règne un potentiel ψ . La théorie cinétique nous dit que la fonction de distribution d'équilibre est alors une maxwellienne déplacée :

$$f_G = n_{G0}\left(\frac{m_G}{2\pi k T_G}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_G c_G^2}{2kT_G} - \frac{m_G\psi}{kT_G}} \qquad (53)$$

qui entraine :

$$n_G = n_{G_0}\, exp - \frac{m_G\psi}{kT_G} \qquad (54)$$

introduisant l'équation de Poisson :

$$\Delta\psi = 4\pi G m n_{G0}\, exp - \frac{m_G\psi}{kT_G} \qquad (55)$$

Pour éclaircir ce problème supposons que :

$$\frac{m_G \Psi}{k T_G} \ll 1$$

Il vient :

$$\Delta\Psi + \frac{\Psi}{L_G^2} = 4\pi G m n_0 \qquad (56)$$

où L_G est la longueur de Jeans qui se trouve être pratiquement le diamètre de l'amas.

Il semble que la solution puisse être considérée comme la superposition de deux solutions Ψ_0 et Ψ_1 .

La première correspond à un milieu uniforme en (x,y,z),c'est à dire à Ψ_0 constant et ne peut s'aborder qu'n introduisant un opérateur Laplacien non Euclidien.

La seconde devient :

$$\Delta\Psi_1 + \frac{\Psi_1}{L_G^2} = 0 \qquad (57)$$

Cette équation linéarisée ayant pour solution : $\Psi_1 = \dfrac{\cos(r/L_G)}{r}$ (58)

On voit donc apparaitre un effet d'écran,la longueur de Jeans L_G jouant ici le même rôle que la distance de Debye dans les plasmas. Il est à noter que GERBAL (1971),se basant sur les concepts de la géométrie différentielle,parvient au même résultat.

III.11) CONCLUSION :

Nous avons montré ici qu'il était possible d'expliciter des solutions de Schwarschlid tridimensionnelles instationnaires de l'équation de Vlasov en particularisant l'ellipsoïde des vitesses.

Les choix que nous avons faits sont limitatifs (équations (6) et (30)) et n'ont été guidés que par l'intuition.

Il semble plus que probable que d'autres solutions puissent être envisagées,qui pourraient en particulier représenter la structure spirale stellaire.

Des travaux récents ([6]) semblent montrer la corrélation existant entre la structure spirale et la déviation du vertex.Celle-ci n'affecte d'ailleurs que les étoiles jeunes,c'est à dire précisément celles qui viennent de naitre dans les bras spiraux.Nous envisageons de rechercher à l'équation de Vlasov une solution du type de Schwarschild traduisant une déviation du vertex à caractère périodique,ceci pour tenter de faire apparaitre la structure spirale.

Un autre projet est de tenter une description du milieu galactique à l'aide de deux populations stellaires I et II.La solution étant cherchée dans un système de deux équations de Vlasov couplées par le champ.Nous espèrons ainsi pouvoir rendre compte plus précisément des lois de rotations observées.D'un autre côté cette solution "enrichie" permettrait peut-être de rendre compte de la dissymétrie constatée de la fonction de distribution de la vitesse azimuthale.

Possibilité de représentation des galaxies et des amas globulaires à l'aide de ce modèle :

Dans le cas des galaxies la loi de vitesse (33),voir figure III.2,donne un éventail de courbes possibles qui s'accordent assez bien avec les résultats d'observation.On notera (III.8) la cohérence trouvée entre les rapports des axes de l'ellipsoïde dans la galaxie et le mouvement de Brandt ($\lambda = 3/4$).

Dans le cas des amas globulaires,référons nous à l'article de P.Bouvier (Réf. [7] 1971).Cet auteur indique que l'isotropie de f (f°) peut convenir au centre de l'amas,mais apparit très inadéquate à la périphérie (p.253). Il constate encore (p.254) que cette anisotropie croit régulièrement du centre à la périphérie (Von Hoerner, 1957),ce qui est une des conclusions principales de notre étude .

Enfin la loi empirique de densité décrite page 255 (équation (7)) :

$$\rho(r) = k\left\{\left(1+\frac{r^2}{r_c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1+\frac{r_t^2}{r_c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}^2$$

rejoint le résultat (47) de notre étude lorsque r_t (limiting radius) est grand devant r_c (core radius).

Pour les galaxies comme pour les amas un problème crucial reste celui des conditions aux limites.Il est fondamental de considérer les systèmes stellaires comme des parties d'un ensemble et non comme des entités isolées.Ainsi la portion de l'espace intéressant une galaxie ou un amas est essentiellement finie et ceux-ci apparaissent,à la lumière de notre étude,comme des perturbations très non-linéaires apportées à une densité " lisse " n_o , à caractère cosmologique.

Il nous semble que le problème de la distribution de masse dans le cosmos devrait pouvoir s'attaquer en recherchant des solutions périodiques dans l'espace de l'équation de Vlasov.Ces solutions étant construites de telle manière que l'on retrouve au voisinage de chaque système les conditions décrites plus haut quant à l'ellipsoïde des vitesses.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE :

[1] K.F.OGORODNIKOV :

Dynamics of stellar systems.
Pergamon Press,1965.

[2] S.CHANDRASEKHAR :

Principles of stellar dynamics.
Dover Publications,1942.

[3] S.CHAPMAN & T.G.COWLING :

The mathematical theory of non-uniform gases.
Cambridge University Press,1958.

[4] EDDINGTON :

Monthly notices,Vol.76,P.572 (1916).

[5] D.GERBAL :

Potentiel gravitationnel de Debye-Hückel dans l'Univers de Lemaitre.C.R.Acad.Sc.Paris 1971.t.272 pp.1389-1392.

[6] Sir R.WOOLEY :

Deviation of the Vertex of the velocity ellipsoïd of young stars and its connection with spiral structure.p.423-432 I.A.U. Symposium n°38 (1970).

[7] P.BOUVIER :

Evolution of stellar clusters and associations.
Structure and evolution of the galaxy.pp.250-261.
D.Reidel Publ.C^{ie} (1971).

Chapitre 4

APPLICATION DE LA THEORIE CINETIQUE
A L'ASTROPHYSIQUE :

THEORIE DE LA STRUCTURE SPIRALE DES GALAXIES

... in static form ever since. ...
... one most puzzling, as well as disconcerting, problems of cosmogony.

Not only so, but until the spiral arms have been satisfactorily explained, it is impossible to feel confidence in any conjectures or hypotheses in connection with other features of the nebulae which seem more amenable to treatment. Each failure to explain the spiral arms makes it more and more difficult to resist a suspicion that the spiral nebulae are the seat of types of forces entirely unknown to us, forces which may possibly express novel and unsuspected metric properties of space. The type of conjecture which presents itself, somewhat insistently, is that the centres of the nebulae are of the nature of " singular points," at which matter is poured into our universe from some other, and entirely extraneous, spatial dimension, so that, to a denizen of our universe, they appear as points at which matter is being continually created.

Sir J.JEANS

IV.1) INTRODUCTION :

On sait qu'une galaxie a sa masse répartie en étoiles et en gaz interstellaire.Les proportions varient suivant les types de galaxies mais on sait à priori que la masse représentée par l'ensemble de la matière stellaire est plus faible que la masse totale de l'ensemble stellaire. Le rapport étant,pour fixer les idées,de un à dix dans les spirales,et bien inférieur dans les elliptiques.

A l'échelle d'une rotation galactique (2×10^8 années) le système stellaire se comporte comme un milieu parfaitement non-collisionnel.Etant donné sa contribution majoritaire à la masse nous poserons que la dynamique de ce milieu est " self consistent ", c'est à dire qu'elle n'est pas influencée de manière sensible par la présence du matériau interstellaire.Les étoiles créent la majeure partie du potentiel gravitationnel et fixent la rotation différentielle de l'ensemble.

Nous nous proposons d'étudier ici le comportement du gaz interstellaire vis à vis de l'instabilité gravitationnelle.

D'emblée l'étude de la dynamique du milieu interstellaire apparait comme très délicate.La première difficulté est de réduire celui-ci à un ensemble d'éléments standards discrets.

La matière interstellaire,composée à 90 % d'hydrogène neutre,se trouve condensée en nuages,ou paquets,de masse assez variée.les plus petits représentant quelques masses solaires et les plus importants quelques milliers.

Avec Spitzer [1] nous prendrons la population standard suivante :

Rayon: 7 pc
Nombre de nuages par $(Kpc)^3$: 5×10^4
Nombre sur la ligne de vue : 8
Fraction du volume occuppée : 0,07
Densité d'atomes H : $10/cm^{-3}$
Masse : 400 masses solaires.

Il apparait que la masse standard est beaucoup plus élevée que la masse moyenne stellaire,que la même auteur évalue à une demie masse solaire.

Continuement le gaz interstellaire perd de l'énergie par rayonnement.Les collisions entre nuages (temps de libre parcours 10^7 ans) sont de plus fortement inélastiques.Des chocs forts apparaissent lors de ces rencontres.Spitzer calcule que l'énergie mutuelle est presque totalement évacuée sous forme radiative,le taux de perte étant de 5×10^{-27} ergs/cm^{-3}/seconde,ce qui fournit un " cooling time " de l'ordre de 10^7 ans.A ce rythme l'abaissement de température serait donc très rapide si celui-ci ne se trouvait pas d'une manière ou d'une autre continuement réalimenté en énergie.Pour ce faire plusieurs mécanismes peuvent être invoqués :

Spitzer évalue d'abord à 3,5 10^{-25} ergs/cm^{-3}/s l'énergie dissippée par les étoiles jeunes,l'efficacité de conversion étant de l'ordre de pourcent.Toujours suivant le même auteur, l'énergie dissippée par les supernovae de type I serait de 1,7 x 10^{-25} ergs/cm^{-3}/s ,chiffre pouvant être doublé si l'on admet le même dégagement pour les supernovae du type II .

L'action de chaque supernova sur le gaz interstellaire étant sensible dans un rayon atteignant plusieurs centaines de parsecs. Ici l'efficacité de conversion serait de 3 % .

Comme on le voit ces deux mécanismes pourraient suffire à eux seuls à entretenir la balance d'énergie dans le gaz.Selon Zwicky les supernovae pourraient y suffire seules.A titre indicatif précisons qu'avec les chiffres indiqués plus haut le libre parcours d'un nuage vis à vis de l'action des supernovae est de 10^5 ans,soit deux ordres de grandeur plus faible que celui indiqué dans une collision entre nuages.

Que peut être effectivement le résultat de cette action des supernovae sur un nuage ? Les données d'observation manquent pour répondre avec certitude.Ce qui peut très bien entrainer la dislocation du nuage. Dans une telle optique le milieu interstellaire se trouverait donc en état de déstructuration-restructuration permanente(agrégation des débris après refroidissement radiatif).

Encore faudrait-il que le temps de Jeans associé à cette seconde phase soit assez bref, cest à dire inférieur à 10^5 ans. On voit que cette question n'est pas simple.

Toujours est-il que la distribution de vitesse dans ce matériau interstellaire doit être fortement influencée par cette action des supernovae et des étoiles jeunes.

Ces deux mécanismes semblent militer dans le sens du maintien d'une distribution isotrope des vitesses résiduelles dans le gaz. Ceci n'est pas en contradiction avec l'observation. (A l'inverse les étoiles offrent dans leur ensemble une distribution fortement anisotrope, ce qui est d'ailleurs en relation directe avec leur mouvement de rotation différentielle.)

Ce préambule va servir de base au calcul que nous allons développer ici.

IV.2) LES IDEES DE BASE DU CALCUL :

Appelons $\overline{g_s}$ et $\overline{g_g}$ les valeurs moyennées dans le temps des contributions stellaires et interstellaires au champ gravitationnel. L'importance de la masse stellaire fait que :

$$\overline{g_s} \gg \overline{g_g} \qquad (1)$$

Notre idée directrice est que la structure spirale procède de l'instabilité de Jeans sévissant dans le milieu interstellaire. (On remarquera en passant que Jeans voyait dans ce phénomène une tout autre origine : référence son ouvrage page 360).

Si l'on applique le critère de Jeans aux deux milieux il apparait que :

$$\begin{cases} L_s = 10\ Kpc \sim \phi \\ L_g = 200\ pc \ll \phi \end{cases} \qquad \left(\phi \text{ étant le diamètre galactique.} \right)$$

La longueur de Jeans étant :

$$L = 2\pi \left(kT / 4\pi G n m^2 \right)^{1/2} \qquad (2)$$

Le milieu stellaire ,à l'inverse du milieu interstellaire,apparait donc peu sensible à l'instabilité gravitationnelle.

Appelons $\tilde{g}_s$ et $\tilde{g}_g$ les contributions des deux milieux à la fluctuation.Nous écrirons :

$$\tilde{g}_s \ll \tilde{g}_g \qquad (3)$$

L'ensemble stellaire,peu sensible à son couplage avec le gaz, vivra sa dynamique propre à travers l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{w}_s \cdot \frac{\partial \vec{f}_s}{\partial r} + \vec{g}_s \cdot \frac{\partial \vec{f}_s}{\partial w_s} = 0 \qquad (4)$$

Par quelle équation décrire le gaz ? tout est là !

Si nous voulons tenir compte de l'action des supernovae nous devons introduire un champ de force $\vec{g}^*$ à caractère aléatoire,qui donne au milieu son isotropie,et de ce fait écrire :

$$\frac{\partial f_g}{\partial t} + \vec{w}_g \cdot \frac{\partial \vec{f}_g}{\partial r} + (\vec{g} + \vec{g}^*) \cdot \frac{\partial \vec{f}_g}{\partial w_g} = \frac{\partial_e f_g}{\partial t} \qquad (5)$$

Le terme $\frac{\partial_e f_g}{\partial t}$ rend compte de l'effet des collisions entre nuages sur la fonction de distribution de vitesse.En s'appuyant sur les travaux de Spitzer,si l'on admet que les étoiles jeunes et les supernovae entretiennent dans le gaz à un rythme rapide (plus rapide que le rythme collisionnel)une situation isotrope nous pourrons tenter de décrire le milieu en première approximation par la fonction maxwellienne :

$$f_g = f_g^{(0)} = n_g \left(\frac{m_g}{2\pi k T_g} \right)^{3/2} \exp - \left[\frac{m_g (\vec{w}_g - \vec{c}_o)^2}{2 k T_g} \right] \qquad (6)$$

C_o étant la vitesse circulaire dans le champ créé par les étoiles.

Ce qui nous conduit à écrire l'équation :

$$\frac{\partial f_g^{(o)}}{\partial t} + \vec{W_g} \cdot \frac{\partial f_g^{(o)}}{\partial r} + \vec{g} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial f_g^{(o)}}}{\partial W_g} = 0 \qquad (7)$$

Nous ferons de plus l'hypothèse suivante :

$$\frac{\overrightarrow{\partial T_g}}{\partial r} = 0 \qquad (8)$$

Introduisons maintenant une perturbation δf_g supposée décrire un mécanisme d'intabilité gravitationnelle. Le temps de Jeans associé à ce phénomène est de l'ordre de 10^8 années (1/2 tour de galaxie). Ce temps se trouve être de trois ordres de grandeur supérieur au temps de libre parcours sous l'action des supernovae (10^5 ans).

On en déduit que $f_g^o + \delta f_g$ peut être, à la même approximation près, figuré par une maxwellienne, ce qui entraine aussitôt :

$$\delta f_g = \delta^o f_g = \frac{\partial f_g^o}{\partial n}\delta n + \frac{\partial f_g^o}{\partial T}\delta T + \frac{\overrightarrow{\partial f_g^o}}{\partial C_o} \cdot \vec{\delta C_o} \qquad (9)$$

et :

$$\frac{\partial_e \left(f_g^o + \delta^o f_g \right)}{\partial t} = 0 \qquad (10)$$

L'équation de perturbation s'écrira donc :

$$\frac{\partial \delta^0 f_g}{\partial t} + \vec{w}_g \cdot \frac{\overrightarrow{\partial \delta^0 f_g}}{\partial r} + \vec{g}_s \cdot \frac{\overrightarrow{\partial \delta^0 f_g}}{\partial w_g} + \vec{\delta g}_g \cdot \frac{\overrightarrow{\partial f^0_g}}{\partial w_g} = 0 \qquad (11)$$

de calcul.

A ce stade tout n'est plus qu'une question de technique ~~calcu-latoire~~.Nous supprimerons l'indice " g " pour allèger les notations.

IV·3) ETABLISSEMENT DE L'EQUATION D'ONDE :

Dans l'équation (11) introduisons la forme (9) de la perturbation. Nous obtenons sans difficulté une expression où figurent les puissances 0,1,2,3 des composantes de la vitesse W d'un élément du gaz,repérée par rapport à un trièdre fixe.Celle ci est variable indépendante et nous pouvons identifier sur les puissances successives.On obtient ainsi à l'ordre trois :

$$\frac{\overrightarrow{\partial \delta T}}{\partial r} = 0 \qquad (12)$$

Termes d'ordre deux :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{WW}} : \left(\frac{1}{2T} \frac{\partial \delta T}{\partial t} \vec{\vec{1}} - \frac{\delta T}{T} \frac{\overrightarrow{\overrightarrow{\partial \zeta_0}}}{\partial r} + \frac{\overrightarrow{\overrightarrow{\partial \delta \zeta_0}}}{\partial r} \right) = 0 \qquad (13)$$

ceci représentant le produit scalaire de deux dyadiques.

$\vec{\vec{1}}$ est le dyadique unitaire : $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$

Termes d'ordre un :

$$-\frac{m}{kT^2}\vec{C_o}\frac{\partial \delta T}{\partial t}+\frac{m}{kT}\frac{\overrightarrow{\partial \delta C_o}}{\partial t}+\frac{1}{n}\frac{\overrightarrow{\partial \delta n}}{\partial r}-\frac{\delta n}{n^2}\frac{\overrightarrow{\partial n}}{\partial r}$$

$$+\frac{m}{kT^2}\delta T\frac{\overrightarrow{\partial C_o}}{\partial r}\cdot\vec{C_o}-\frac{m}{kT}\frac{\overrightarrow{\partial C_o}}{\partial r}\cdot\overrightarrow{\delta C_o}-\frac{m}{kT}\frac{\overrightarrow{\partial \delta C_o}}{\partial r}\cdot\vec{C_o} \qquad (14)$$

$$-\frac{m}{kT}\vec{\delta g}+\frac{m\,\delta T}{kT^2}\vec{g}=0$$

Termes d'ordre zéro :

$$\frac{1}{n}\frac{\partial \delta n}{\partial t}-\frac{3}{2T}\frac{\partial \delta T}{\partial t}-\frac{m}{kT}\vec{C_o}\cdot\frac{\overrightarrow{\partial \delta C_o}}{\partial t}+\frac{m}{kT}\vec{\delta g}\cdot\vec{C_o}+\frac{m}{kT}\vec{g}\cdot\overrightarrow{\delta C_o}=0 \qquad (15)$$

(13) est un système d'équations aux dérivées partielles. On montre qu'il admet la solution :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta C_o}=\left(\frac{\delta T}{T}\vec{\omega}+\overrightarrow{\delta\omega_1}\right)\times\vec{r}-\frac{1}{2T}\frac{\partial \delta T}{\partial t}\vec{r}} \qquad (16)$$

REMARQUE : Afin de ne pas surcharger l'exposé les parties qui ne sont que des détails de calcul sont indiquées dans l'annexe qui accompagne ce chapitre.

$\overrightarrow{\delta\omega_1}$ est situé sur l'axe de la galaxie et ne dépend que du temps.

$\vec{r}$ est le vecteur (x,y,z). Le dernier terme de (16) fait apparaitre une composante radiale isotrope, proportionnelle à la distance au centre.

VITESSE DE GROUPE ET VITESSE DE PHASE :

$\delta\vec{C}_o$ correspond à la vitesse de groupe, puisque c'est la vitesse de la perturbation. Notons au passage que $\delta\vec{C}_o \ll \vec{C}_o$ entraine un système " training " .

IV·4) Problème de la persistance des bras.

$\delta\vec{\omega} = \frac{\delta T}{T}\vec{\omega} + \delta\vec{\omega}_1$ représente la vitesse angulaire de la perturbation. Il y a donc addition d'une vitesse de rotation en corps solide et d'une vitesse de rotation différentielle.

Si $\frac{\delta T}{T} \gg \frac{\delta\omega_1}{\omega}$ la rotation différentielle prime. Elle entraine l'enroulement des bras et leur non persistence.

Si $\frac{\delta T}{T} \ll \frac{\delta\omega_1}{\omega}$ le dessin de la perturbation se conserve au cours du temps.

IV·5) Paramètres macroscopiques du milieu perturbé.

La fonction de distribution globale est :

$$f^o + \delta^o f$$

f^o décrivant le milieu non perturbé et $\delta^o f$ la perturbation. Les paramètres macroscopiques qui s'en déduisent (voir 9) sont :

$$\begin{cases} n^* = n + \delta n & (17) \\ \vec{C}_o^* = \dfrac{n\vec{C}_o + \delta n\,\vec{C}_o + n\delta\vec{C}_o}{n + \delta n} & (18) \\ T^* = \dfrac{nT + n\delta T + T\delta n}{n + \delta n} & (19) \end{cases}$$

Si δn est périodique en θ ou en ρ cette périodicité rejaillira sut les paramètres $\vec{C_o}^*$ et T^*

Comme $\vec{C_o}$ n'a pas de composante radiale il n'y aura pas de fluctuation radiale de $\vec{C_o}^*$.

Supposons $\delta\omega_1 > o$ .La relation (17) donnerait alors une vitesse de phase plus élevée dans les bras,bien que ceux-ci (vitesse de groupe) tournent apparement plus lentement que l'ensemble.

Fig III (1)

On pourrait donner l'interprétation intuitive suivante :

Fluant à travers le bras les éléments du gaz se trouvent accélérés d'abord du fait de l'attraction issue de la concentration de matière que représente l'onde.Conclusion inverse au sortir du bras.

Notons que Lin [4] donne une conclusion inverse dans son étude. Dans cette perspective C_o^* serait également plus élevé dans une structure en anneau(voi annexe IV A Fig A12)

Ainsi la matière flue continuement à travers les bras. Examinons maintenant le terme d'ordre zéro :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \vec{c_0}\cdot\frac{\partial \delta n}{\partial \ell}\right) = \frac{3}{2T}\frac{\partial \delta T}{\partial t} \qquad (20)$$

Il s'écrit :

$$\frac{D}{Dt}\left\{\delta \log \frac{n}{T^{3/2}}\right\} = 0 \qquad (21)$$

L'élimination sur les termes de degré unité fournit encore :

$$\omega \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\Delta \delta\Psi + \frac{\delta\Psi}{L^2}\right) = \frac{1}{L^2}\left(c_0^2 \frac{1}{T}\frac{\partial \delta T}{\partial t} - \rho^2 \omega \frac{\partial \delta \omega_1}{\partial t}\right) \qquad (22)$$

où :

$$L = \sqrt{\frac{kT}{4\pi 6 n m^2}} \qquad (23)$$

Bien que nous nous soyions placés dans une optique perturbationnelle supposons qu'un régime semi-permanent puisse être atteint. Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim 0 \qquad \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\Delta \delta\Psi + \frac{\delta\Psi}{L^2}\right) = 0 \qquad (23_{bis})$$

III.6) EXPLOITATION DE CES RESULTATS :

Si on suppose le phénomène périodique l'équation (24)se réduit à l'équation de Helmoltz :

$$\Delta \delta\Psi + \frac{\delta\Psi}{L^2} = 0 \qquad (25)$$

Introduisons une perturbation de la forme :

$$\delta\Psi = H(\rho)\, e^{ip\theta} \qquad (25)$$

où p est le nombre de bras.Il vient :

$$\frac{\partial^2 \delta\Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \delta\Psi}{\partial \rho} + \frac{\delta\Psi}{L^2} - p^2\frac{\delta\Psi}{\rho^2} = 0 \qquad (26)$$

avec,dans tout ce qui va suivre : $\rho = (x,y,\theta)$

Pour aller plus loin il faut maintenant se donner l'évolution de L en fonction de la distance aucentre galactique.Puisque nous avons supposé T constant cela revient à se donner $n(\rho)$.Supposons une variation linéaire :

$$L = \frac{\rho}{\alpha} \qquad (27)$$

où α est une constante.

L'équation admet alors des solutions de la forme :

$$H(\rho) = e^{i\mu \log \rho} \qquad (28)$$

auquelles correspondent des spirales logarithmiques telles que l'angle V formé par la courbe et le rayon vecteur soit donné par :

$$tg\, V = \frac{1}{p}\sqrt{\alpha^2 - p^2} \qquad (29)$$

L'examen de cette relation montre que l'angle V est d'autant plus grand que p (nombre de bras) est petit.(Annexe IVA Fig. A_2, A_3, A_4, A_5.)

Pae ailleurs lorsqu'on se rapproche du centre il y a lieu de supposer que :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \simeq 0$$

On pourra alors dire,grosso-modo que α décroit.Conséquence : A nombre de bras constant l'angle V décroit au fur et à mesure que l'on s'approche du centre.(*) Ces deux résultats sont en accord qualitatif avec l'observation.Plus généralement nous écrirons :

$$\delta\Psi = F(\rho)\, e^{ip(\theta + \varphi(\rho))} \qquad (30)$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \rho\varphi' = \dfrac{C}{F^2} = tg\, V \qquad (C = cte) & (31) \\ F'' + \dfrac{F'}{\rho} + F\left(\dfrac{1}{L^2} - \dfrac{p^2}{\rho^2}\right) - \dfrac{p^2 C^2}{\rho^2 F^3} = 0 & (32) \end{cases}$$

(*) Voir IVA Fig A7

Remarquons que l'équation (32) peut s'écrire :

$$F'' + \frac{F'}{\rho} + F\left[\frac{1}{L^2} - \frac{p^2}{\rho^2}\left(1 + tg^2 V\right)\right] = 0 \qquad (33)$$

Au voisinage du centre nous aurons F" et F' voisins de zéro,ce qui entraine :

$$p^2\left(1 + tg^2 V\right) = \left(\frac{\rho}{L}\right)^2 \qquad (34)$$

On voit dans cette relation que l'existence de bras sera liée au fait que :

$$\frac{\rho}{L} \geqslant 2 \qquad (35)$$

Que représente la quantité $F(\rho)$? C'est le module de la fluctuation de densité à une distance ρ du centre galactique.Si l'équation (32) fournit une solution à variation lente :

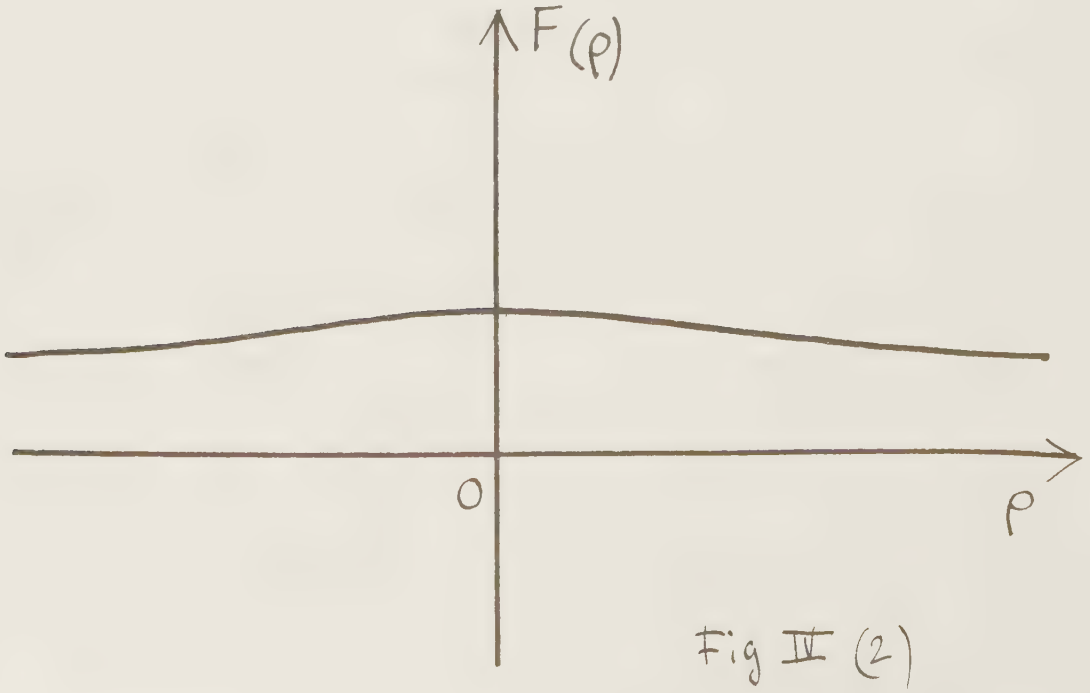


Fig IV (2)

c'est à dire si F" et F' sont faibles, du fait que $\operatorname{tg} V = \frac{C}{F^2}$ on obtiendra un dessin très proche d'une spirale logarithmique :

Fig IV (3)

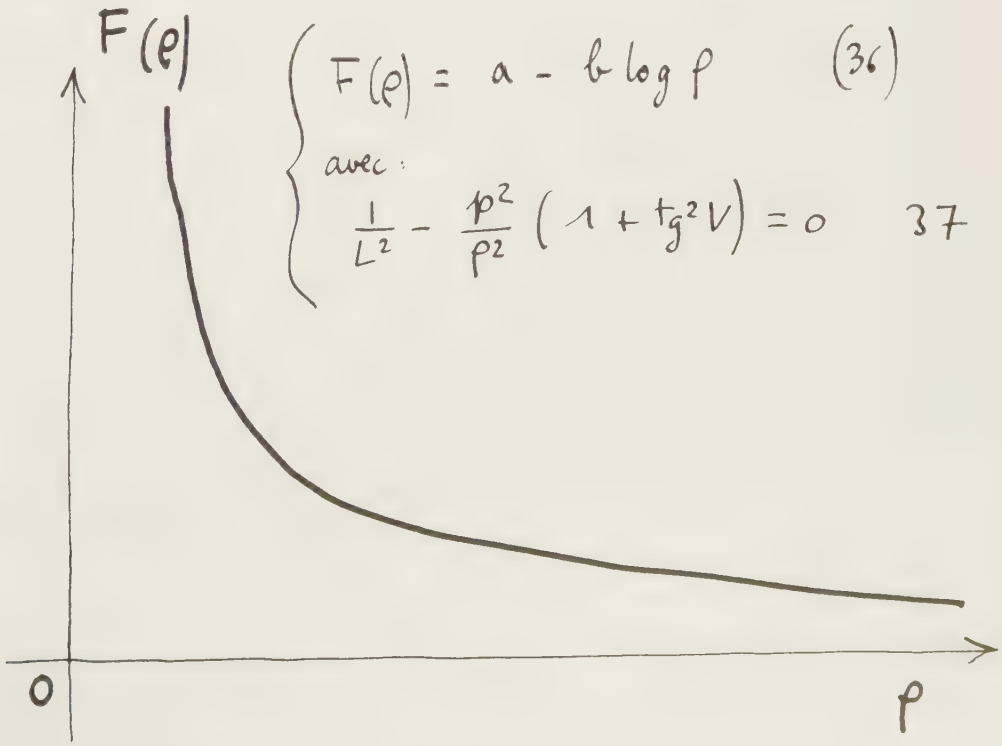
Spirale logarithmique

Voir Annexe IV A Fig A 1

Ce qui correspond bien à la forme générale des galaxies spirales (Denver 1942).

Si par contre la courbe accuse une remontée sensible vers le noyau, dans une solution comme :

Fig IV (4)



$$\begin{cases} F(\rho) = a - b \log \rho & (36) \\ \text{avec :} \\ \frac{1}{L^2} - \frac{p^2}{\rho^2}\left(1 + \operatorname{tg}^2 V\right) = 0 & 37 \end{cases}$$

Ce type de solution pourra rendre compte de formations "barrées" :

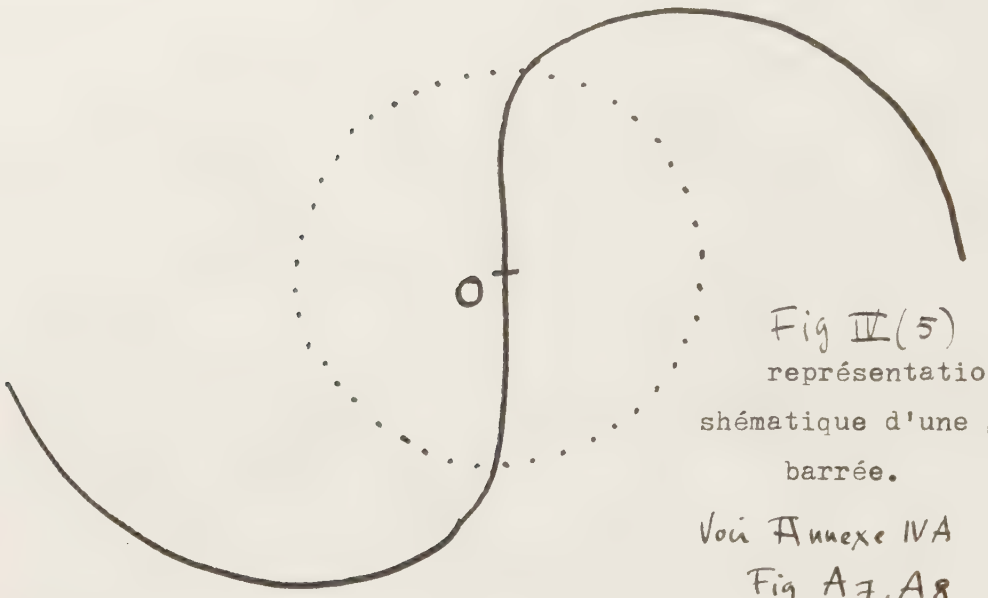
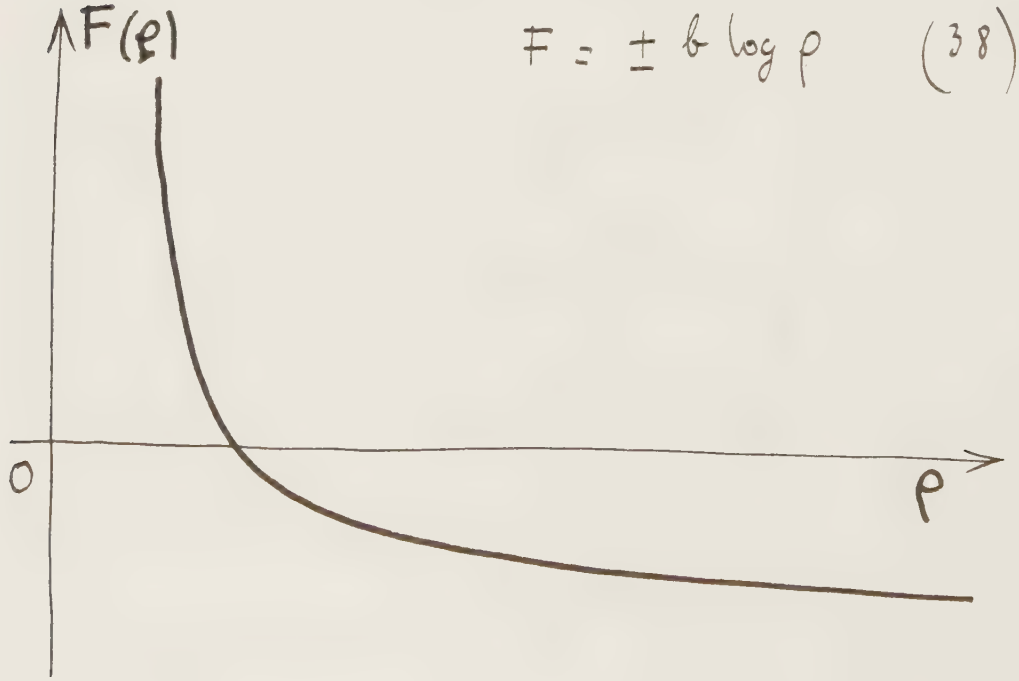


Fig IV(5)
représentation shématique d'une galaxie barrée.

Voir Annexe IVA
Fig A7, A8, A9

Si la solution présente un zéro, par exemple dans une solution comme :

Fig IV(6)



$$F = \pm b \log \rho \qquad (38)$$

il lui correspondra une formation du type "anneau" telle que NGC 2523 :

Fig IV (7)

représentation shématique d'une galaxie du type "Ø". Annexe IVA Fig. A10, A11

Autre remarque : reprenant l'équation (26) dans le cas où $F \simeq cte$ on voit aisément que :

$$\delta\Psi = \cos p\,(\theta + \mu_1 \log \rho)\,\cos \mu_2 \log \rho \qquad (39)$$

est aussi solution. L'hydrogène neutre peut donc a priori se trouver réparti en condensations le long des bras spiraux, la distance intercondensations (pseudo-période) valant : $\frac{2\pi}{\mu_2}$ (voir figure page suivante).

Enfin la solution p = 1 n'est pas à rejeter à priori, celle-ci pouvant se superposer à des solutions correspondant à p = 2 etc....

Ceci entrainerait une distribution dissymétrique de l'hydrogène neutre, associée probablement à une distribution dissymétrique des vitesses. (voir page suivante).

Fig IV (8)

Représentation shématique des condensations d'hydrogène neutre le long des bras, prévues par la théorie.

Fig IV (9)

représentation shématique d'une distribution dissymétrique de l'hydrogène neutre (type M 33).

IV.7) SIGNIFICATION PHYSIQUE DE CES RESULTATS :

Une remarque s'impose d'emblée : l'analyse présentée ici s'appuie sur la méthode perturbationnelle,elle ne peut donc prétendre apporter une réponse exhaustive et définitive au difficile problème de la structure spirale des galaxies.Néanmoins le bon accord qualitatif avec les données de l'observation semble indiquer qu'il y ait là une voie à suivre,dans une approche qu'il importe de rendre,bien sûr,non-linéaire.

Que peut-on dire des hypothèses de base de ce calcul.La question de la forme de la fonction de distribution de perturbation a déja été abordée au tout début.

L'hypothèse d'isothermie (8),compte tenu de récentes observations (Hutchmeier 1971),ne semble pas irréaliste.

Plus délicate semble celle que nous avons faite sur $n(\rho)$.En effet pour obtenir une structure spirale logarithmique nous avons été conduit a nous donner une loi $n \propto \frac{1}{\rho^2}$ .Or il est un fait d' observation que si cette densité n'est pas constante,elle est loin de présenter une variation aussi brutale.Mais dirons-nous,la comparaison est-elle la bonne ?

La variation de densité représentant le phénomène "bras" est très non-linéaire.Disons pour fixer les idées que cette densité varie ainsi d'un facteur 3 (Baldwin 1971),pour une même distance au centre ρ .Nous voici loin d'un phénomène perturbationnel.

A l'opposé il s'agirait plutôt d'une situation où la perturbation Δn ,par son importance,relègue au second plan une supposée densité (initiale) non perturbée n .Dans cette logique,toujours sur le plan qualitatif,il conviendrait alors de comparer l'évolution spatiale de la densité H I mesurée avec la loi d'évolution F (ρ) (bien que cette dernière ne soit qu'une perturbation....)

Nous avons pu disposer de mesures récemment faites (Baldwin 1971) sur la distribution de l'hydrogène neutre dans M 33.

On remarque tout d'abord des condensations qui ne sont pas sans rapport avec le shéma n°1 de la page IV.17 .Il est clair aussi que cette distribution est très dissymétrique,rappelant la figure n°2 de la page IV.17 .Intuitivement il semble que cette dissymétrie devrait avoir une incidence sur la vitesse.Ceci pourrait rendre compte des récentes mesures effectuées par l'équipe de Marseille (Boulesteix et Al. 1971),faisant état d'un écart de plusieurs dizaines de Km/s entre le bras nord et le bras sud de M 33,la bras le plus pauvre en H I ayant la plus forte vitesse angulaire.

IV.8) PROBLEME DES CONDITIONS AUX LIMITES :

Nous avons vu que d'après ce modèle il ne devrait pas y avoir de structure spirale à proximité immédiate du centre galactique.

Qu'advient-il à la périphérie ?

Les mesures disponibles sur M 33 (Baldwin 1971) font état d'une diminution assez brusque de la densité du gaz.Si on assimile cette densité avec F (ρ) on voit que l'angle V doit croitre,ce qui est le cas.

Si l'on conserve l'hypothèse d'isothermie on voit qu'une chute de la densité représente un accroissement rapide de la distance de Jeans.Ce phénomène pourrait entrainer la disparition des bras spiraux à la périphérie,comme on le constate d'ailleurs dans M 33 .

Dans une optique diamètralement opposée supposons que la densité (dans une galaxie quelconque) puisse conserver une valeur notable dans l'espace intergalactique,ce qui pourrait être le cas dans les amas de spirales.La relation :

$$\operatorname{tg} V = \frac{C}{F^2}$$

permettrait alors d'interprèter les ponts de matière que l'on observe dans certains systèmes (NGC 6027) ,comme un raccordement de bras spiraux.

IV.9) EVOLUTION DU GAZ INTERSTELLAIRE ET STABILITE DES BRAS.

Les étoiles se forment dans les bras,puis s'en vont migrer vers les autres régions des galaxies (il s'agit bien entendu des étoiles récentes).Ces mêmes étoiles réémettent continuement du gaz.On peut s'accorder sur le fait que le bilan se fait au détriment du matériau interstellaire.La formation des étoiles appauvrit les galaxies en gaz,ce qui,suivant le critère de Jeans,est un phénomène stabilisant.

Le problème de l'évolution temporelle et celui de la température translationnelle T_g est une question de bilan (*).

Si le taux de gain d'énergie imputé aux étoiles jeunes et aux supernovae excède le taux de perte radiative dans les collisions entre nuages,le gaz pourra évoluer vers une configuration stable,ce qui implique la disparition des bras.Dans cette optique les elliptiques seraient des spirales en fin d'évolution.Mais de nombreux auteurs pensent que la forme des galaxies ne serait due qu'aux conditions ayant présidé leur formation: densité,température,moment angulaire initiaux.On sait que les elliptiques sont plus massives que les spirales.Un moment aungulaire initial élévé contrariera la contraction. Suggèrons le mécanisme de formation suivant :

Dans une portion de l'espace un faible moment angulaire favorise l'accrétion d'une grande quantité de matière,avec production rapide d'étoiles à forte dispersion de vitesse.Ce qui expliquerait du même coup l'aspect renflé des elliptiques et leur pauvreté en gaz.

Gaz résiduel qui ,suivant le critère de Jeans,serait stable.C'est à dire que l'on aurait : $L_g > \phi_g$

ϕ_g étant le petit axe de l'elliptique (la première manifestation de l'instabilité devrait être l'applatissement du gaz résiduel avec formation d'un disque.)

(*) Latemperature translationnelle se définit par :

$$\frac{3}{2} k T = \frac{1}{2} m \langle C^2 \rangle$$

On notera que dans la Galaxie $T_g \gg T_{sI} \sim T_{sII}$

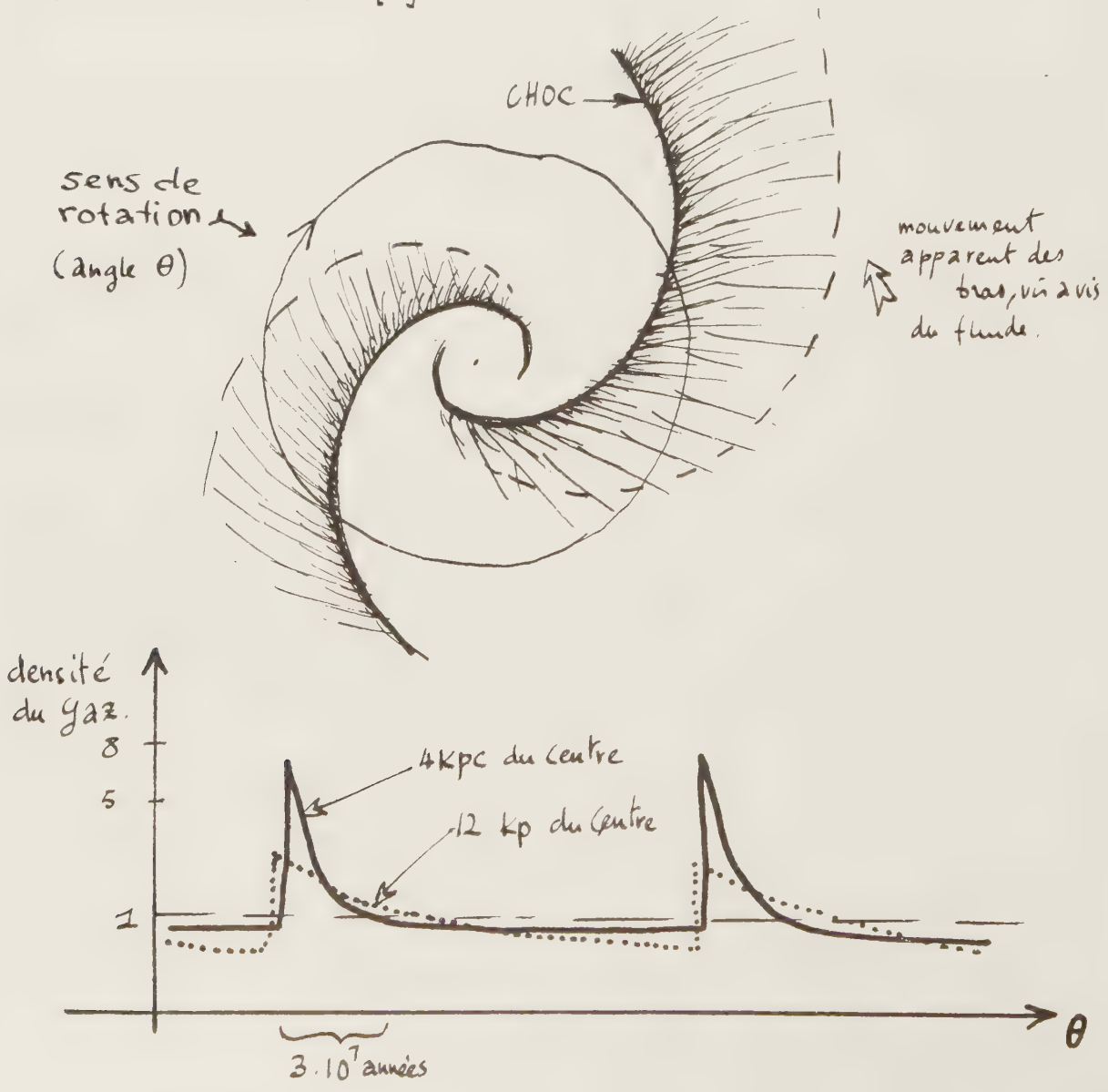
(sI pour les étoiles de population I et sII pour la population II)

IV.10) FORMATION DES ETOILES :

Dans notre analyse la structure spirale apparait comme une onde de densité cheminant à contrario vis à vis du fluide,et dans laquelle la densité et la température translationnelle croissent,ainsi du reste que la vitesse macroscopique.

Dans la réalité,étant donné la faible vitesse d'agitation présentée par le milieu interstellaire (de l'ordre du km/s) et étant donné d'autre part le caractère fortement non-linéaire de la recompression qui s'effectue dans les bras,on pense aussitôt que celle-ci puisse s'effectuer à travers un choc,de nature gravitationnelle.

A ce sujet nous avons cru bon de reproduire les figures données par W.W.Roberts (Réf.[9]) :



Suivant cet auteur le pic de densité associé au choc assurerait le déclenchement du collapse gravitationnel provoquant la formation d'étoiles dans les bras.A ces étoiles sont associées des régions H II dont on sait que celles-ci se distribuent en "noeuds" le long des bras, comme du reste l'hydrogène neutre (ce qui apparait dans notre calcul).

IV.11) CONCLUSION :

Dans cette analyse on a cherché à imputer la structure spirale galactique à l'instabilité de Jeans sévissant dans le gaz interstellaire,le milieu stellaire étant supposé ne suivre ces fluctuations que d'assez loin (M33).On a supposé par ailleurs,en se basant sur des calculs effectués par Spitzer,que la fonction de distribution du gaz était directement influencée par l'action des supernovae et des étoiles jeunes,entretenant l'isotropie.

Des équations obtenues par la méthode perturbationnelle on tire des conclusions qualitatives qui semblent bien se marier avec l'observation. En particulier une explication est fournie de la structure des nébuleuses barrées et des nébuleuses du type ϕ .

Une voie semble donc se dessiner.On se propose maintenant d'effectuer une analyse non-linéaire,seule capable d'entrainer une comparaison valable avec l'observation.

Il n'est pas exclu que l'instabilité de Jeans,conduisant à des structures spirales ou anneaux,puisse se produire dans le milieu stellaire (à condition que le diamètre galactique soit plus grand que la distance de Jeans associée au gaz d'étoiles).Voir à ce sujet le chapitre III .Dans notre optique ce phénomène s'associerait à la déviation constatée du vertex.On remarquera que dans la Galaxie cette déviation semble n'affecter que les étoiles jeunes,fraichement issues du gaz,que nous voyons conservant le souvenir de leur provenance par deux aspects :

- Leur faible vitesse résiduelle.
- L'orientation particulière de l'ellipsoïde.

IV.12) NOTATIONS :

Indice s	:	se réfère à la population stellaire
Indice g	:	se réfère au gaz interstellaire
$\vec{g}$	:	champ gravitationnel
Ψ	:	potentiel gravitationnel
f	:	fonction de distribution de vitesse
$\vec{W}$	:	vitesse par rapport à un trièdre fixe
$\vec{C}_o$	:	vitesse macroscopique
$\vec{C} = \vec{W} - \vec{C}_o$	:	vitesse résiduelle
$\vec{\partial}/\partial r$	:	gradient dans l'espace (x,y,z)
$\vec{\partial}/\partial W$	:	gradient dans l'espace (u,v,w)
k	:	constante de Boltzmann
G	:	constante gravitationnelle
T_s	:	température translationnelle de l'espèce s
$\vec{WW}$	:	Dyadique composé à partir du vecteur W
n	:	nombre de densité
m	:	masse de l'élément
ω	:	vitesse angulaire
r	:	vecteur (x,y,z)
ρ	:	vecteur (x,y,o)
θ	:	angle azimuthal
p	:	nombre de bras

IV.13) BIBLIOGRAPHIE :

[1] SPITZER L. Jr.

Diffuse matter in space.

Interscience tracts on physics and astronomy,1960

[2] Sir J.JEANS :

Astronomy and Cosmology

Dover publications,1961.

[3] S.CHAPMAN & T.G.COWLING :

The mathematical theory of non-uniform gases.

Cambridge University Press 1958

[4] LIN & SHU :

Theorie de la structure spirale

Apj. 140 , 646 (1961).

[5] PETIT J.P. :

Théorie de la structure spirale des galaxies.

C.R. Acad. Sc. Paris t.272 pp.1389-1392.

[6] BOULESTEIX & Al :

[7] HUTCHMEIER :

[8] BALDWIN :

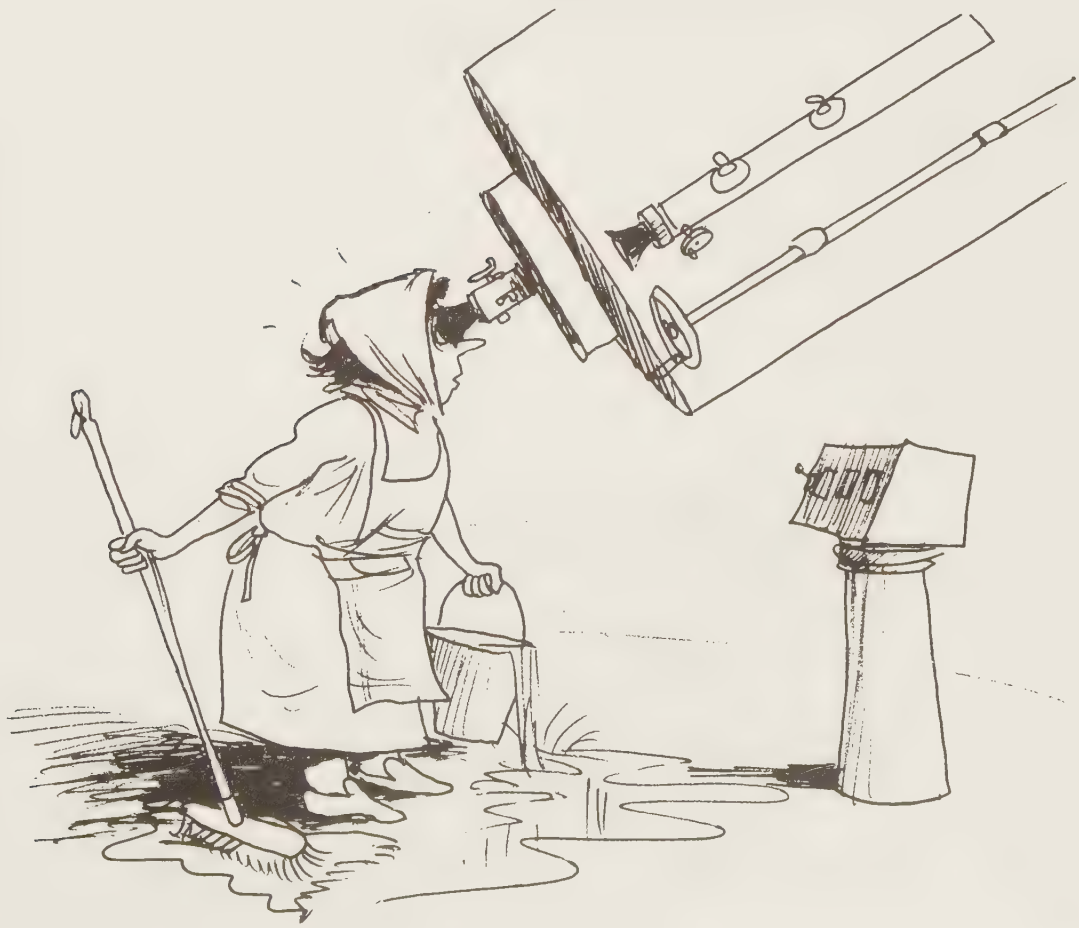
} 1971.Communications privées,résultats non publiés.

[9] W.W.ROBERTS :

IAU Symposium n° 38 pp.415-422.

Large scale galactic shock and its implication on stars formation.

ANNEXE A DU CHAPITRE IV :
EXTRAITS DU CATALOGUE DE
HUBBLE ET ARP .



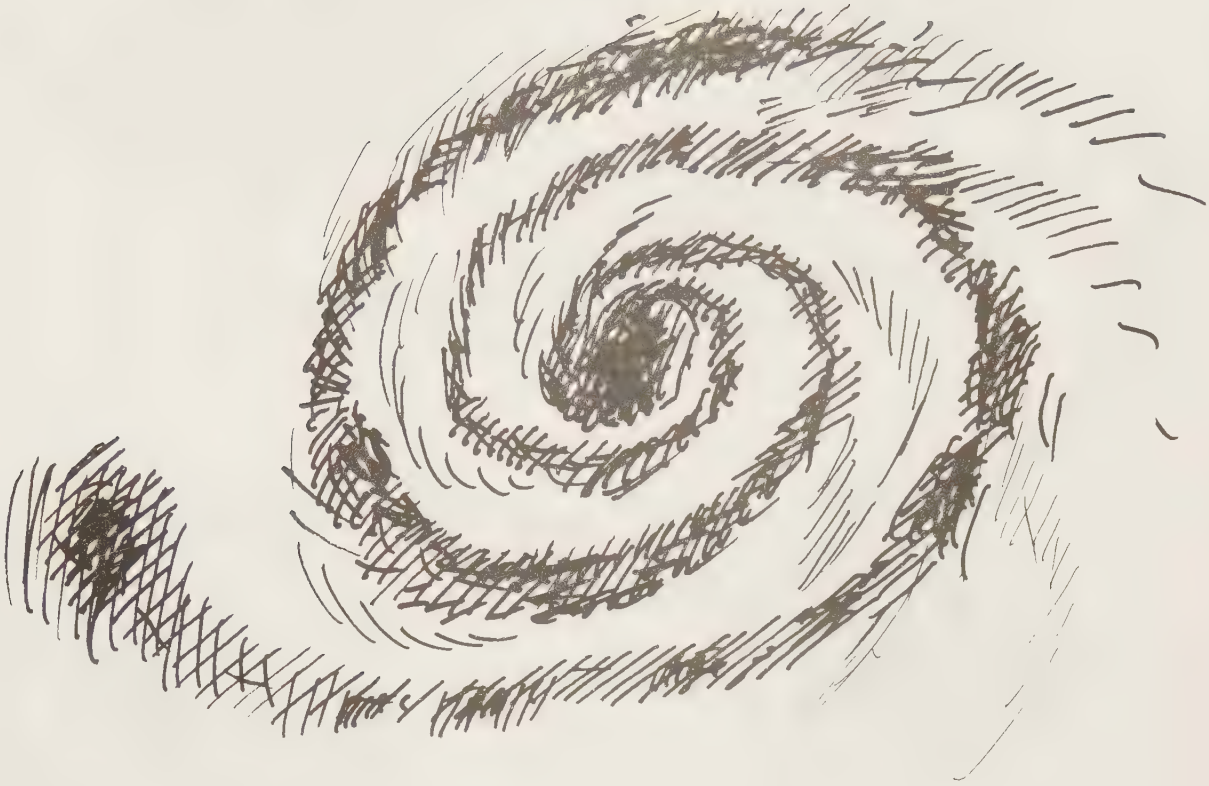


Figure : A 1

NGC 5194 (M 51)

Figure : A 2

NGC 1232

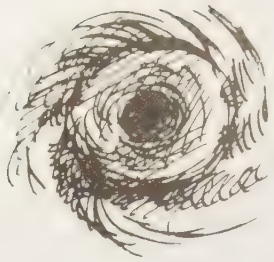


Figure A 3
NGC 4750

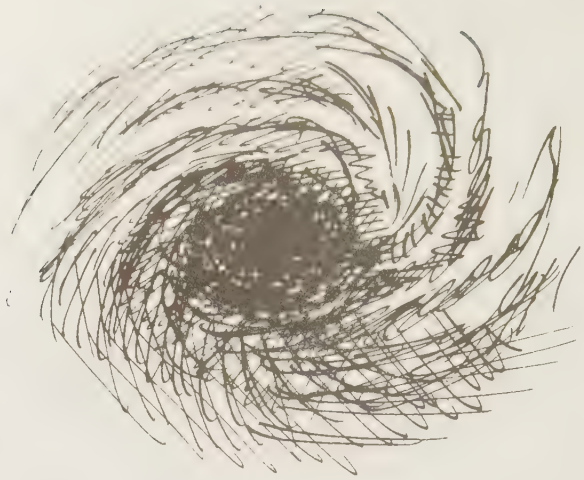


Figure A 4
NGC 4736

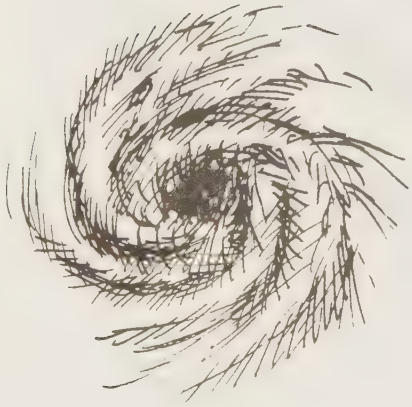


Figure A 5
NGC 6814

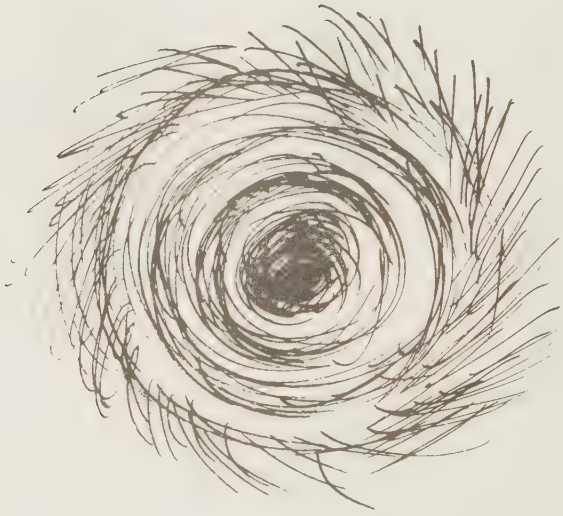


Figure : A 6
NGC 488

Figure : A 7
NGC 175

Figure : A 8

NGC 1300

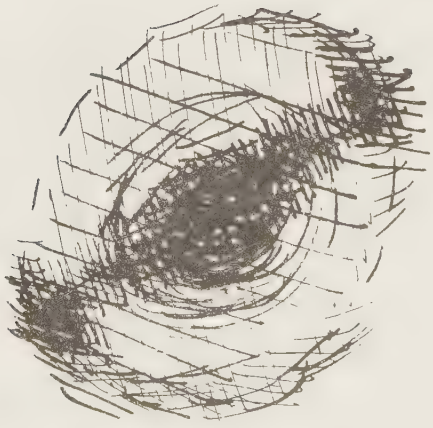


Figure : A 9

NGC 5101

Figure : A 10

NGC 2523

Figure : A 11

NGC 1398

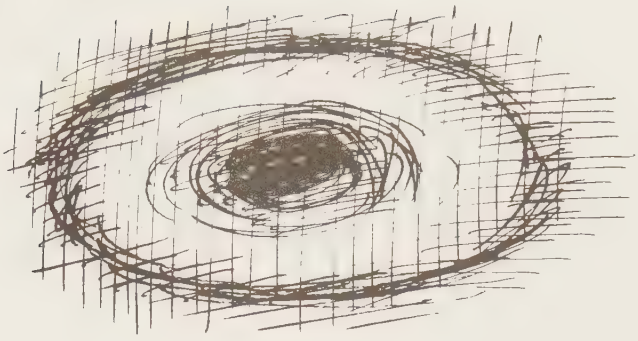
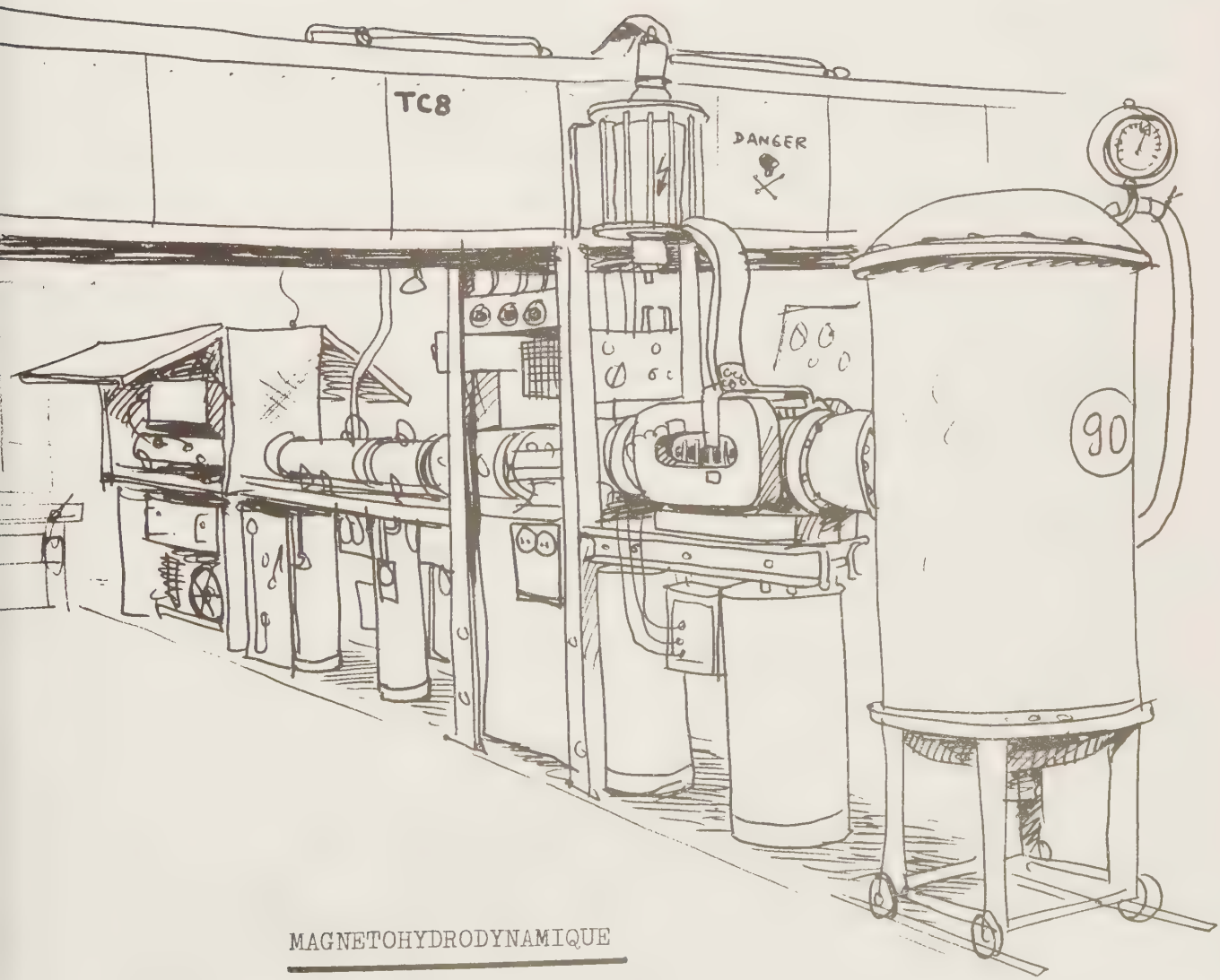


Figure : A 12
NGC 3081.

Figure : A 13
Cliché 320 de l'Atlas de Hubble.

Chapitre 5



MAGNETOHYDRODYNAMIQUE

V.I INTRODUCTION :

Lorsqu'un courant de gaz conducteur de l'électricité traverse les lignes de forces d'un champ magnétique il est soumis dans son ensemble à une tension inductrice $\vec{u} \times \vec{B}$

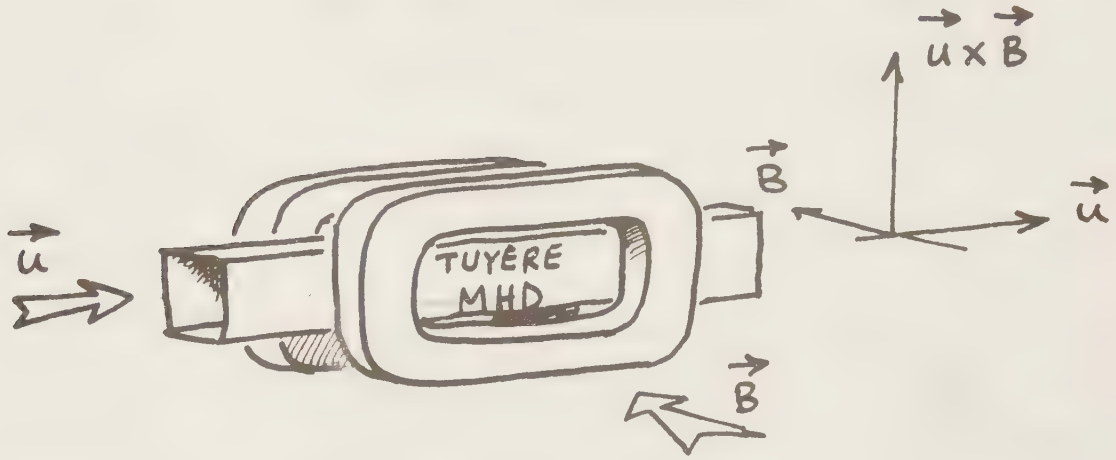


Figure V.1 Shéma de convertisseur MHD

Si des électrodes sont alors placées de façon convenable pour autoriser le passge du courant et son bouclage à travers une résistance de charge,cet ensemble deviendra un convertisseur magnétohydrodynamique.

Parmi les nombreux montages possibles,deux retiennent notre attention :

a) Montage dit " de Faraday ",à électrodes segmentées,figuré cidessous :

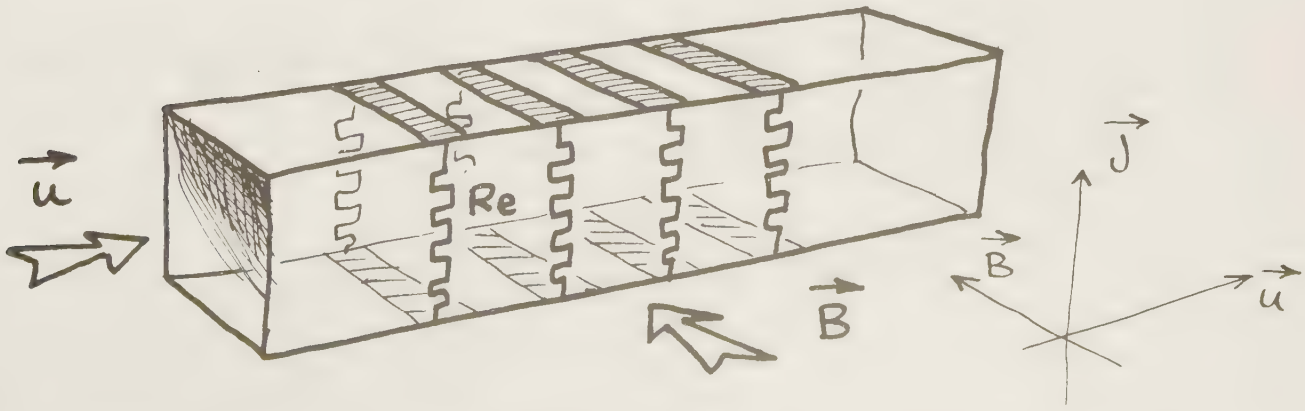


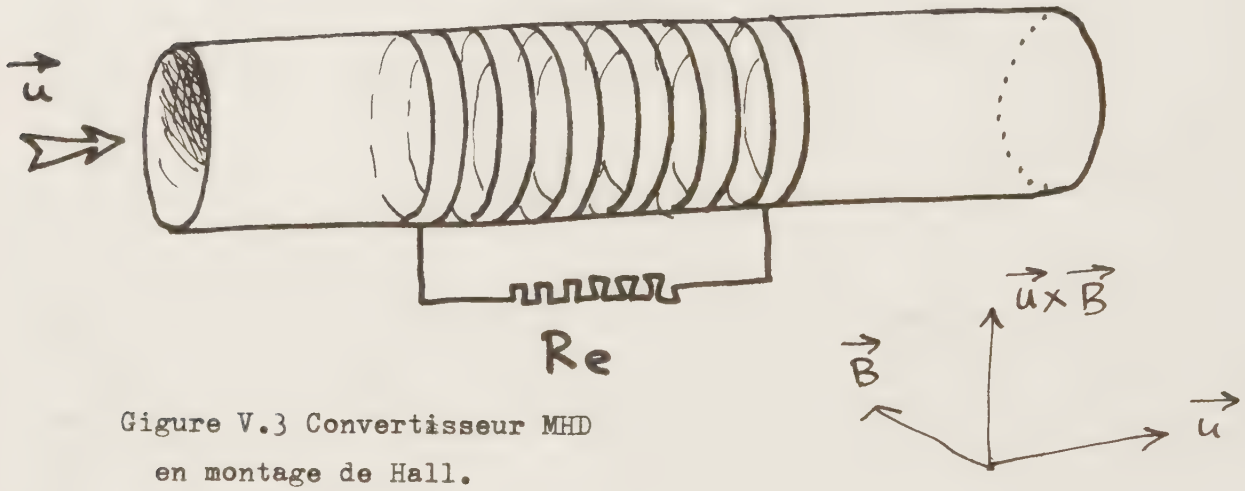
Figure V.2 Convertisseur MHD de Faraday.

Dans ce type de montage la disposition des électrodes oblige le vecteur densité de courant à être normal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{B}$. Les résistances de charge débitent la puissance :

$$P_e = R_e I^2$$

I étant l'intensité débitée par une paire d'électrodes et R_e la resistance de charge associée à cette paire.

b) Montage dit " de Hall " :



Gigure V.3 Convertisseur MHD
en montage de Hall.

Dans ce montage des électrodes annullaires rendent chaque section droite de la tuyère électriquement isopotentielle.Le courant est collecté sur une résistance de charge reliant les électrodes amont et aval.

Dans ces deux types de montage le champ électrique $\vec{E}^*$ vu par les électrons est la somme du champ électromoteur $\vec{u} \times \vec{B}$ et du champ créé par la résistance de charge $\vec{E}$ (*)

$$\vec{E}^* = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}$$

(*) Champ $\vec{E}$ associé à la chute de tension dans la résistance de charge.

Le vecteur densité de courant n'est pas colinéaire avec le vecteur champ apparent $\vec{E}^*$ .Une relation tensorielle les lie :

$$\vec{j} = \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{E}^*$$

Quelques aspects de la conversion de l'énergie par voie MHD :

L'extraction de puissance se paiera par un ralentissement du fluide du au forces de Lorentz $\vec{j} \times \vec{B}$ .Ce ralentissement peut être assez intense pour entrainer l'apparition d'un choc MHD dans la tuyère.Le rendement électrique sera défini comme le rapport de la puissance extraite à la puissance totale mise en jeu par les forces de Lorentz :

$$\eta = \frac{\vec{E} \cdot \vec{J}}{(\vec{J} \times \vec{B}) \cdot \vec{u}}$$

La perte étant représentée par la quantité : $\frac{J^2}{\sigma}$

cette énergie contribuant à l'échauffement du fluide caloporteur.

Pour obtenir un rendement acceptable il est donc nécéssaire de maximiser la conductivité électrique scalaire .

Une des possibilités d'insertion du procédé MHD consiste à utiliser comme fluide de conversion le gaz de refroidissement d'un réacteur nucléaire :

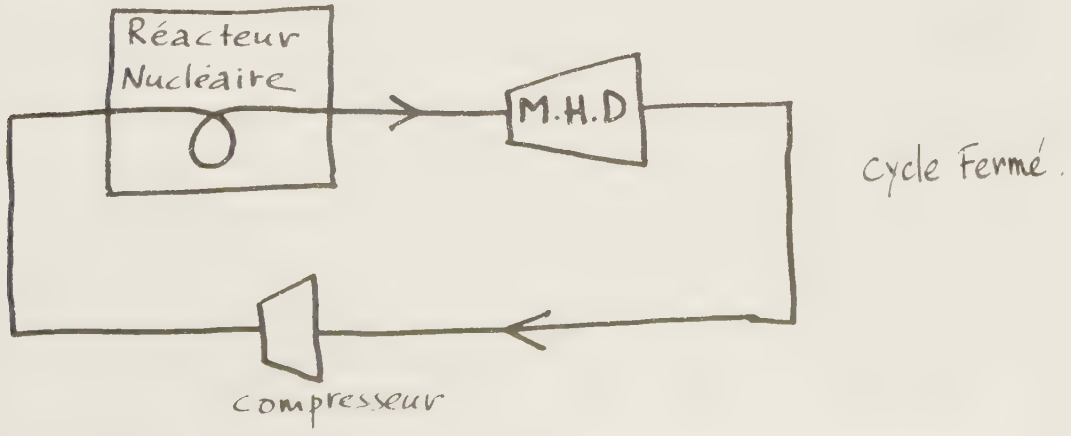


Figure V.4 Couplage en cycle fermé d'un convertisseur MHD avec un réacteur nucléaire.

Le gaz s'échauffe dans la pile,puis est mis en vitesse dans une tuyère de détente,l'extraction d'énergie par voie MHD est alors réalisée.Enfin le gaz est recomprimé et réinjecté dans la pile. C'est un cycle fermé .

Tout le problème nait du fait que les réacteurs développés jusqu'ici n'autorisent des températures de gaz qu'à peine supérieures à 1000 °K.La pression en sortie de pile étant de quelques dizaines d'atmosphères,ceci pour faciliter l'échange thermique.

Après mise en vitesse les pressions et températures du gaz n'autorisent plus que des conductivités électriques insignifiantes.

On a alors recours à l'ensemencement , adjonction au fluide d'une substance facilement ionisable,le Césium par exemple,avec un taux faible (10^{-2} à 10^{-3}).

La conductivité se trouve alors fortement accrue mais sans atteindre la valeur requise pour autoriser une conversion avec un rendement acceptable.

V.II CONVERSION HORS EQUILIBRE :

En 1961 , en même temps que d'autres auteurs, J.L.Kerrebrock de M.I.T. proposa de tenter de découpler les températures T_e et T_g (températures électroniques et du gaz).

En effet que se passe-t-il lorsque notre plasma se trouve soumis au champ électromoteur $\vec{u} \times \vec{B}$?

Les Ions ayant une mobilité faible,acquièrent un mouvement d'ensemble vis à vis du fluide négligeable au cours de leur transit dans le convertisseur.Les électrons par contre,si leur libre parcours moyen est assez long,peuvent acquérir une énergie dépassant l'énergie d'ionisation de la semence.Il y aura ainsi effet d'ionisation secondaire.Le rapport entre la densité des électrons secondaires et celle des électrons primaires pouvant atteindre plusieurs milliers.

Les températures seront définies par :

$$\begin{cases} \frac{3}{2} k T_e = \frac{1}{2} m_e \langle c_e^2 \rangle \\ \frac{3}{2} k T_i = \frac{3}{2} k T_g = \frac{1}{2} m \langle c_i^2 \rangle \end{cases}$$

On a vu (voir le chapitre I" calcul des paramètres de transport d'un plasma non-Lorentzien ") que la loi de Saha pouvait être utilisée dans le calcul de la densité électronique à partir des données de température et de concentration, sous réserve de certaines précaution. Dans les calculs qui seront effectués plus loin nous supposerons toujours que ceci peut être réalisé.

Nous supposerons également que le temps d'ionisation est faible devant le temps de transit dans la tuyère, c'est à dire que le régime établi de l'ionisation est atteint dès l'entrée du convertisseur. Il est alors possible d'envisager une analyse locale des convertisseurs MHD fonctionnant hors d'équilibre.

Ce calcul aura des chances de représenter le fonctionnement d'un tel générateur sous réserve que soient satisfaites un certain nombre d'hypothèses que nous allons devoir préciser.

Nous allons d'abord brièvement passer en revue les différents problèmes qui apparaissent dans l'étude des convertisseurs de Faraday et de Hall et nous énoncerons chemin faisant les hypothèses correspondantes.

a) Problème de l'établissement de l'ionisation :
La vitesse d' ionisation dépend énormément des conditions amont du générateur (température et pression). Le problème de l'établissement de l'ionisation dans le générateur est très complexe. Admettons le shéma d'ionisation suivant :

$$\begin{cases} e + A \rightarrow e + A^* \\ e + A^* \rightarrow A^+ + 2e \end{cases}$$

Les électrons primaires acquièrent de l'énergie sur un libre parcours, qu'ils communiquent par collision inélastiques aux atomes neutres. Ceux-ci passent dans un état excité, puis à l' état d'ions en libérant un électron secondaire. Dans une première phase, de l'ordre de quelques libres parcours, la fonction de distribution électronique est considérablement perturbée par l'action du champ électromoteur d'une part et par celle des

collisions inélastiques d'autre part.Elle est certainement assez éloignée de la maxwellienne,surtout si les atomes du gaz possèdent des niveaux métastables,avec forte section efficace.

Le développement de l'ionisation secondaire accroit le nombre des collisions électrons-électrons.La vitesse d'ionisation dépendra évidement des sections efficaces correspondantes.

Citons pour mémoire un processus d'ionisation utilisant l'effet Penning :

$$\begin{cases} e + A \rightarrow e + A^*_{mét.} \\ A^*_{mét} + B \rightarrow A + B^+ + e \end{cases}$$

Le fluide caloporteur est alors constitué de deux substances A et B.L'atome A possède un niveau métastable (exemple Hélium) associé à une forte section efficace.La seconde collision entre un métastable A et un atome B provoque l'ionisation de B (par exemple Argon). Le rendement de ce transfert énergétique est bon si l'énergie métastable est supérieure et assez voisine de l'énergie d'ionisation de l'atome B.

Si la température du gaz à l'entrée du convertisseur est faible la densité d'électrons primaires le sera également et le temps caractéristique d'ionisation deviendra prohibitif.On peut alors envisager d'effectuer une préionisation immédiatement à l'entrée du convertisseur en effectuant une décharge,afin d'amener la densité des électrons primaires à une valeur acceptable,amorçant ainsi le processus.Ceci n'est pas sans présenter beaucoup de difficultés et ne sera pas abordé ici.

En supposant cela réalisé on peut alors valider l'hypothèse que l'ionisation soit totalement développée dès l'entrée du convertisseur.Nous supposerons également que cette ionisation soit parfaitement homogène.

b) Problème du à la segmentation des électrodes :

Celle-ci est nécéssairement finie et entraine une distorsion des lignes de courant dans la tuyère :

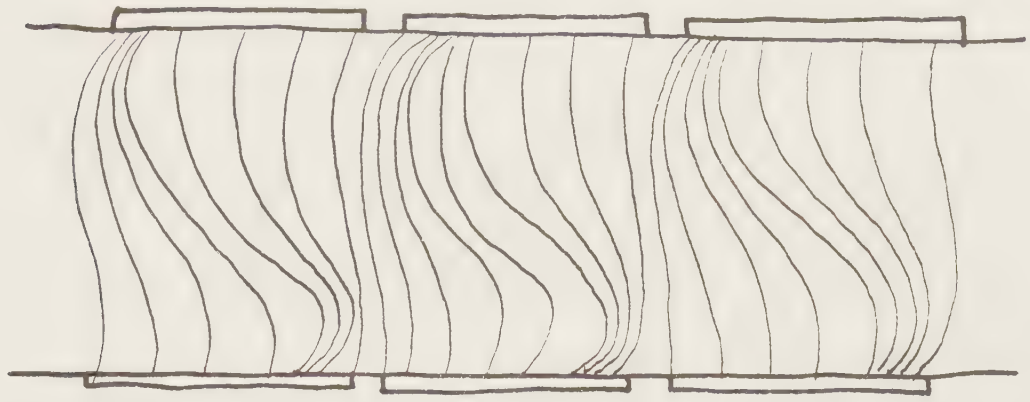


Figure V.5 distribution de courant avec segmentation finie.

La figure ci-dessus est empruntée à l'étude de Hurwitz,Kilb et Sutton (voir référence 2) et représente le champ théorique de courant d'un générateur de Faraday muni d'électrodes à segmentation finie.On voit que ceci entraine des concentrations de courant sur les bords des électrodes.

Nous supposerons dans notre calcul que la segmentation puisse être considérée comme infinie,le vecteur j étant,dans le cas du générateur de Faraday,partout normal à l'axe du générateur.

c) Problème des couches limites.

Dans la couche limite les températures T_e et T_g varient,ainsi que la densité électronique.De plus au voisinage des électrodes la conduction du courant se fait par le moyen d'arcs instationnaires,dans lesquels la densité de courant est très élevée. L'apparition d'une "couche limite électrique" entraine l'existence d'une chute de tension non négligeable devant la valeur du champ inducteur (couramment dans les expériences de l'ordre de 20 %). Lorsque la densité de courant devient trop faible celle-ci peut même concurencer la tension inductice,entrainant le désamorçage du générateur.

Dans les deux types de générateurs existe une tension longitudinale,dite "tension de Hall".Etant donné que les couches limites sont plus conductices de l'électricité un court-circuitage peut en résulter,le fonctionnement du générateur correspondant à la limite à la configuration " électrodes continues " ou "shorted mode ".

Nous supposerons dans notre calcul que le générateur n'est pas dans cet état de court-circuitage et que les effets de paroi sont négligeables.

d) Effets d'extremités:

Les générateurs ne sont forcément pas infinis,d'ou des effets de bouts qui amènent des pertes supplémentaires (voir l'étude de Sutton,Hurwitz et Poritzky,référence[5])

Nous supposerons le plasma homogène à l'entrée de la tuyère.

e) Effet du champ induit :

La circulation du courant j entraine l'apparition d'un champ magnétique induit B_i ,qui s'oppose d'ailleurs au champ inducteur B . Nous supposerons les courants assez faibles pour que B_i puisse être négligé.

f) Effet des forces de Lorentz :

Celles-ci ont un effet retardateur sur le plasma.Dans un générateur à section constante le plasma est donc recomprimé tout au long de son passge dans le convertisseur.L'effet de ces forces de Lorentz peut être chiffré à l'aide du paramètre d'interaction :

$$S = \left[2\sigma (1-k)^2 B^2 \ell^2 \right]$$

σ est la conductivité électrique scalaire, K le facteur de charge,B le champ magnétique et ℓ un longueur caractéristique, prise ici égale à 1 cm .

L'expérience a montré (G.Inglesakis,thèse de Doctorat à l' Institut de Mécanique des Fluides Marseille 1968) qu'un choc MHD apparaissait lorsque ce paramètre atteignait 0,4 ,remontant vers l'amont et venant se stabiliser en amont de la tuyère.Nous supposerons que nul choc ne se produit et pour ce faire nous limiterons nos calculs aux cas ou $S \leqslant 0,4$.

Etant donné l'inévitable phénomène de recompression notre calcul n'aura de plausibilté qu'à l'entrée de la tuyère.Ceci pose un problème dans le cas de la tuyère de Hall.

Le courant débité dépend en effet de la perte de charge totale le long du convertisseur.Nous pouvons alors ne considérer que des convertisseurs très courts,en négligeant les effets de bouts ou des situations ou le ralentissemnt est négligeable,c'est à dire où le paramètre d'interaction est petit devant l'unité.

g) Effet de l'instabilité électrothermique :

On sait que les plasmas hors d'équilibre,soumis à un champ magnétique transverse sont sensibles,dans certaines conditions à un phénomène d'instabilité d'ionisation,dit instabilité électrothermique. Ceci sera abordé avec plus de précisions dans la seconde partie de ce chapitre.Nous supposerons dans notre calcul que le plasma est électrothermiquement stable.

Ce grand nombre d'hypothèses peut à priori sembler consacrer d'emblée la faillite d'un tel calcul.On remarquera cependant qu'en l'absence d'hypothèses il n'y a,dans ces problèmes de MHD,plus grand chose de faisable.Cette étude ne vise d'ailleurspas à donner des valeurs précises des paramètres de conversion,mais à fournir des ordres de grandeur et à mettre en lumière certains aspects caractéristiques des générateurs MHD fonctionnant hors équilibre, concernant en particulier la puissance et le rendement.

V.IV COMPORTEMENT THEORIQUE LOCAL D'UN GENERATEUR DE FARADAY PARFAIT HORS D'EQUILIBRE,A ELECTRODES SEGMENTES INFINIMENT.

La température électronique va être calculée à partir de l'équation de l'énergie du gaz d'électrons :

$$\vec{E}^* \cdot \vec{J}_e = \sigma (1-k)^2 u^2 B^2 = n_e \sum_{s \neq e} \frac{2 m_e}{m_s} \delta_s \langle \nu_{es} \rangle \frac{3}{2} k (T_e - T_s)$$

δ_s étant le coefficient chiffrant les pertes inélastiques. On suppose nulles les pertes radiatives.L'interaction électron-particules neutres sera prise du type maxwellien.On appliquera la méthode de Lin.La conductivité électron-ions sera calculée eu égard aux resultats théoriques du premier chapitre.

On aura donc :

$$\langle \nu_{es} \rangle = \langle Q_{es} \rangle \, n_s \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}}$$

$$\sigma = \frac{1}{\sum_{s \neq e} \frac{1}{\sigma_{es}}} \qquad \text{(méthode de LiN)}$$

$$\sigma_{ei} = \sigma_{ei}^{(2)} = \frac{0,612 \, n_e \, (4\pi K_0)^2 \, (2kT_e)^{3/2}}{\pi^{3/2} \, m_e^{1/2} \log \Lambda' \sum_{s \neq e} n_s Z_s^2}$$

$$\Lambda' = \frac{2d'}{b^*} \qquad b^* = \frac{e^2 Z_s}{2\pi k_0 m_e \langle c^2 \rangle}$$

$$Z_s = 1$$

$$d' = \left(\frac{kK_0}{n_e e^2} \, \frac{2T_e T_i}{T_e + T_i} \right)^{1/2} \qquad \text{(distance de Debye)}$$

Le paramètre de charge est défini par :

$$K = \frac{R_c}{R_e + R_{plasma}} = \eta \qquad \text{(rendement électrique).}$$

Le calcul a été effectué pour un mélange de gaz rares (Hélium et Argon).Les conditions de calcul sont les suivantes :

Mélange 70 % Hélium - 30 % Argon.
Température du gaz : 4000°K
Pression du gaz : 1 Bar
Champ magnétique : 2 Teslas
Vitesse à l'entrée de la tuyère : 2460 m/s.

Ces conditions ayant été choisies en fonction d'une étude devant être faite sur tube à choc.

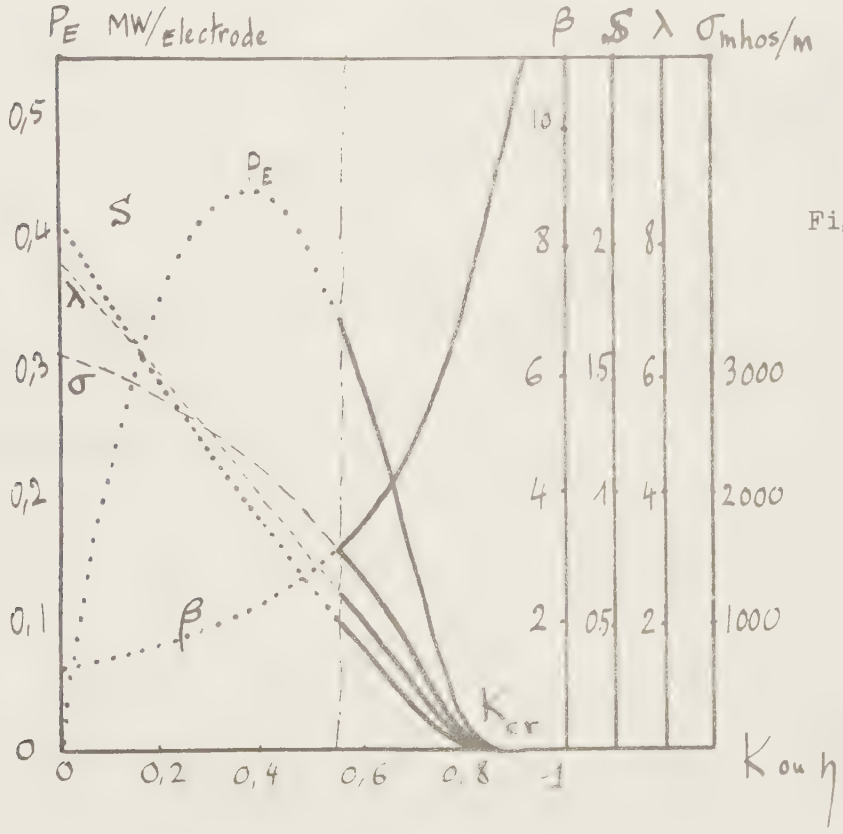


Figure V.6

Diagramme Puissance-Rendement.

Soit $\mathcal{V}^*$ = 35,3 cm^3 le volume prismatique intéressant une paire d'électrodes.

L'allure de la courbe de puissance a une interprétation simple: lorsque le paramètre de charge est élevé la conductivité electrique est pratiquement la conductivité de l'équilibre σ_{eq}

La courbe de puissance est alors pratiquement osculatrice à la courbe :

$$P_{E_{(I)}} = \sigma_{eq}\, K(1-K)\, u^2 B^2 v^*$$

Lorsque le paramètre de charge est faible la conductivité électrique varie lentement et la courbe de puissance est proche de la parabole :

$$P_{E_{(II)}} = \sigma_{MAX}\, K(1-K)\, u^2 B^2 v^*$$

Ce que nous traduirons sur le schéma ci-après :

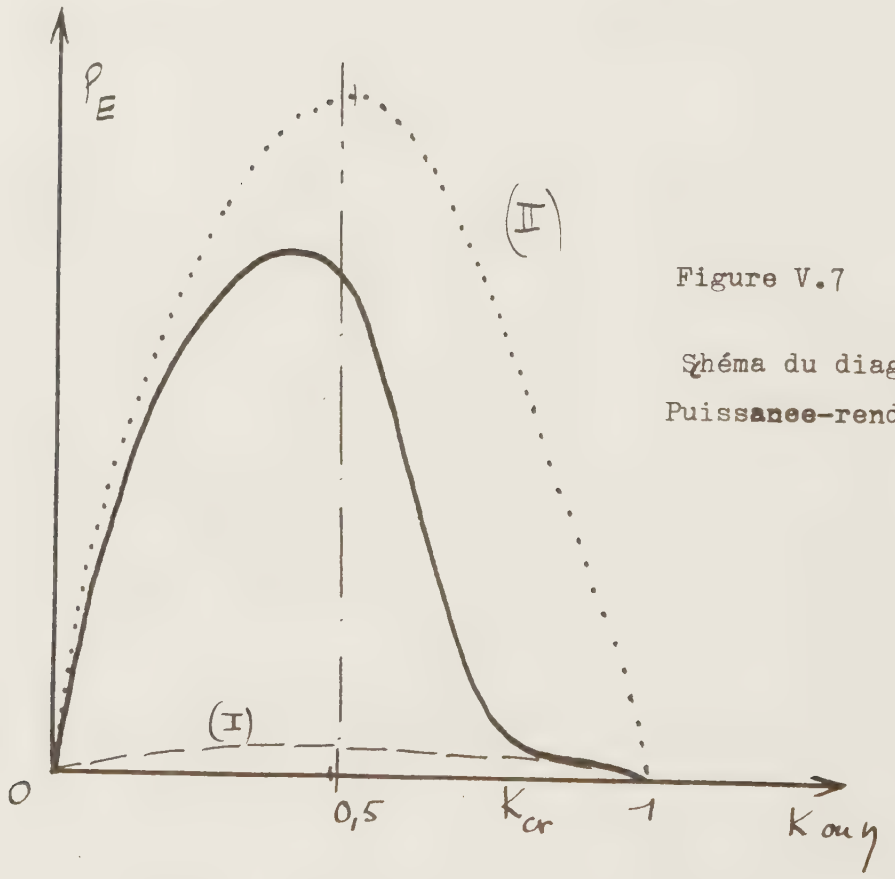


Figure V.7

Schéma du diagramme Puissance-rendement.

Dans la figure précédente nous avons figuré en pointillés les portions de courbes hors limite de validité ($S \geq 0{,}4$).

On voit aussi clairement que le générateur ne débite de la puissance que lorsque le facteur de charge est inférieur à une valeur critique K_{cr} que nous appellerons valeur d'amorçage.

Avec le développement de la situation hors d'équilibre nous voyons croitre ensemble la conductivité électrique scalaire σ et le rapport λ de la fréquence de collision électron-ions à la fréquence de collision électron-neutres. Le paramètre de Hall se révèle très sensible à la variation du facteur de charge. Nous utiliserons cette propriété dans la seconde partie de cette étude, consacrée à l'instabilité électrothermique.

Deux résultats encore :

Dans la figure ci-après nous avons porté le diagramme puissance-facteur de charge pour différentes valeurs de la température de gaz. La limite $S = 0,5$ a été figurée.

Si l'on recherche un maximum de puissance extraite on a intérêt à travailler à faible facteur de charge, c'est à dire à faible rendement électrique.

Au basses températures la limite imposée par la valeur d'amorçage impose une valeur assez faible au rendement électrique, ceci pour des valeurs données de la pression et du champ magnétique.

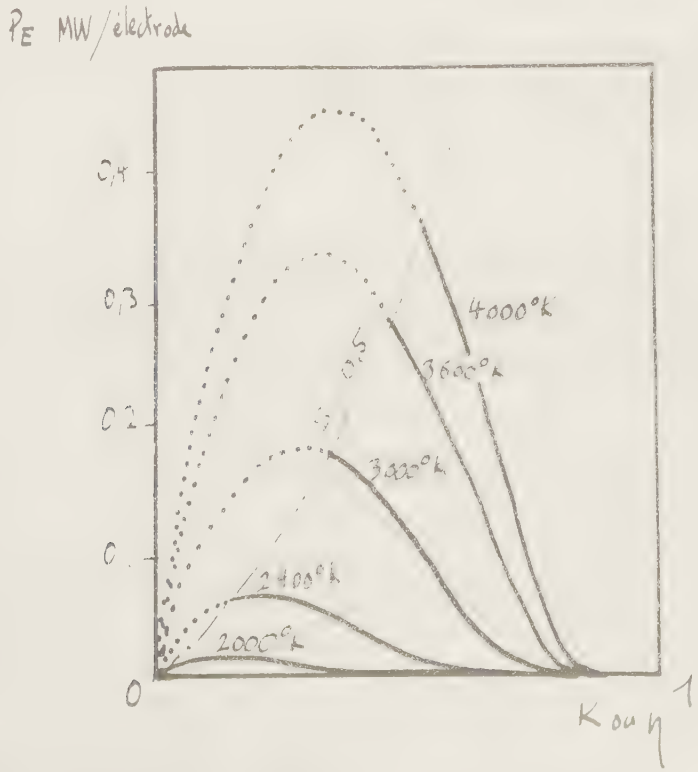


Figure V.8

Diagramme Puissance-rendement

Influence de la température du gaz.

Si maintenant pour une même température de gaz on accroit le champ magnétique on obtient un relèvement sensible de la puissance.Mais comme on le verra ultérieurement le système devient aussi plus sensible à l'instabilité d'ionisation.

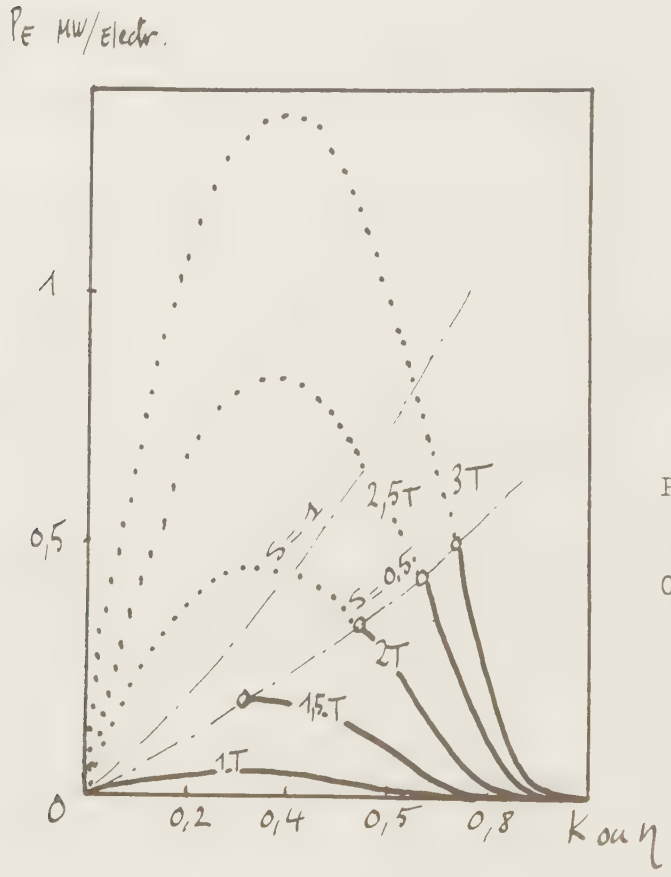


Figure V.9

Diagramme Puissance-rendement Influence du Champ magnétique

V.V COMPORTEMENT THEORIQUE LOCAL DU GENERATEUR DE HALL PARFAIT A ELECTRODES INFINIMENT SEGMENTEES ET HORS EQUILIBRE :

L'équation de l'énergie s'écrit alors :

$$\frac{\sigma u^2 B^2 \left(1+\beta^2 K_H^2\right)}{1+\beta^2} = 3 n_e m_e k \sum_{s \neq e} \left(T_e - T_g\right) \frac{\delta_s \langle \nu_{es} \rangle}{m_s}$$

où : $$K_H = \frac{1}{1 + \frac{L}{R_e S}\,\frac{1+\beta^2}{\sigma}}$$

L étant la longueur du générateur, supposé homogène et S sa section, supposée constante.

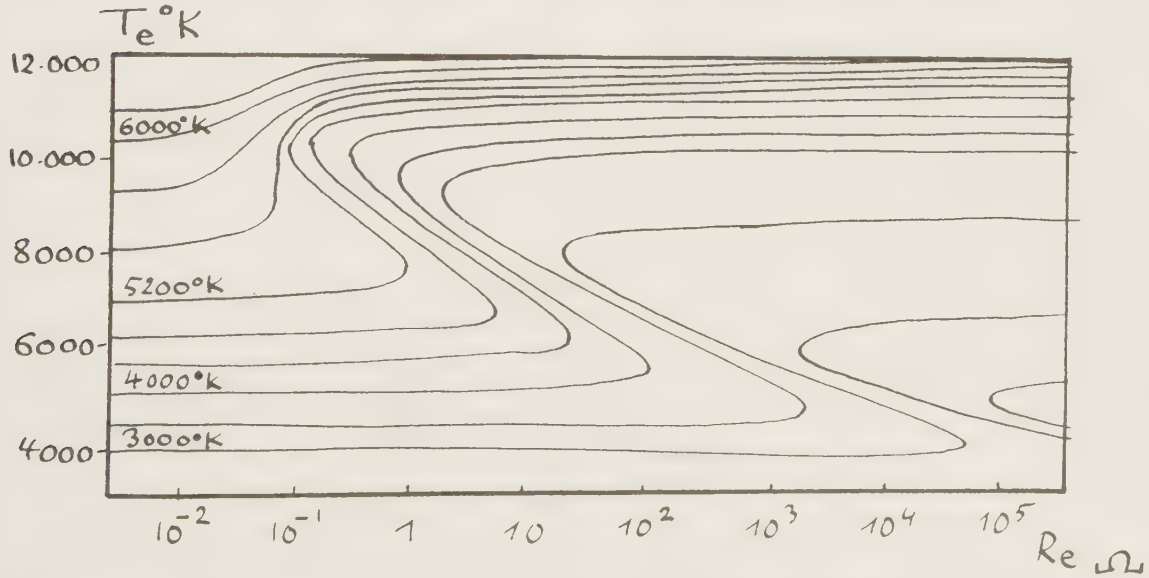
$$P_E = \frac{\sigma \beta^2}{1+\beta^2} K_H \left(1 - K_H\right) u^2 B^2 \qquad \text{en W/m}^3$$

$$\eta = \frac{\vec{E} \cdot \vec{J}}{\left(\vec{J} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{u}} = \frac{\beta^2 K_H \left(1 - K_H\right)}{1 + \beta^2 K_H}$$

Nous allons tracer le diagramme température électronique-résistance de charge. On remarque tout d'abord, à l'inverse du générateur de Faraday, que la plus forte température électronique est atteinte pour une valeur infinie de la résistance de charge R_e .

Dans cette configuration le générateur de Hall se confond avec un générateur de Faraday en état de court-circuit, c'est à dire à facteur de charge nul .

Figure V.10 : Caractéristiques de fonctionnement du générateur de Hall fonctionant hors d'équilibre.



Mélange 70% Hélium - 30% Argon. Longueur de tuyère = 10 cm
Section droite: 12,6 cm^2 .Champ magnétique : 2 Teslas. Pression 1 bar.

Seconde remarque : le diagramme fait état de trois valeurs de la température électronique obtenues pour une même valeur de la résistance de charge R_e .La courbe a l'allure d'une courbe dite " de déferlement ".

Nous allons montrer que la partie de la courbe où $\frac{\partial T_e}{\partial R_e} < 0$ n'a pas de réalité physique car elle est instable.

Posons :

$$\frac{\sigma(T_e)\, u^2 B^2 \left(1 + \beta^2(T_e)\, K_H^2(R_e, T_e)\right)}{1 + \beta^2(T_e)} = A(R_e, T_e)$$

$$3\, n_e(T_e)\, m_e\, k \sum_{s \neq e} (T_e - T_s) \frac{\delta \langle \nu_{es}(T_e) \rangle}{m_s} = B(T_e)$$

$$Q = A(R_e, T_e) - B(T_e) .$$

Le régime du générateur sera instable si : $\frac{\partial Q}{\partial T_e} > 0$

Sur la caractéristique :

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial T_e} dT_e + \frac{\partial Q}{\partial R_e} dR_e = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial T_e} = \frac{\partial Q}{\partial R_e} \cdot \frac{dR_e}{dT_e} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial R_e} = \frac{\partial A}{\partial R_e}$$

$$\frac{\partial A}{\partial Re} = \frac{\sigma u^2 B^2 \beta^2}{1+\beta^2} \, 2K_H \frac{\partial K_H}{\partial Re}$$

$\frac{\partial Q}{\partial Re}$ a le signe de $\frac{\partial K_H}{\partial Re}$

or : $K_H = \frac{1}{1 + \frac{L}{Re S}\left(\frac{1+\beta^2}{\sigma}\right)}$ donc : $\frac{\partial K_H}{\partial Re} > 0$

$\frac{\partial Q}{\partial Te}$ a le signe de : $-\frac{dRe}{dTe}$

La branche où: $\frac{dTe}{dRe} < 0$ sera donc instable et l'on pourra représenter le diagrame (T_e, R_e) comme suit :

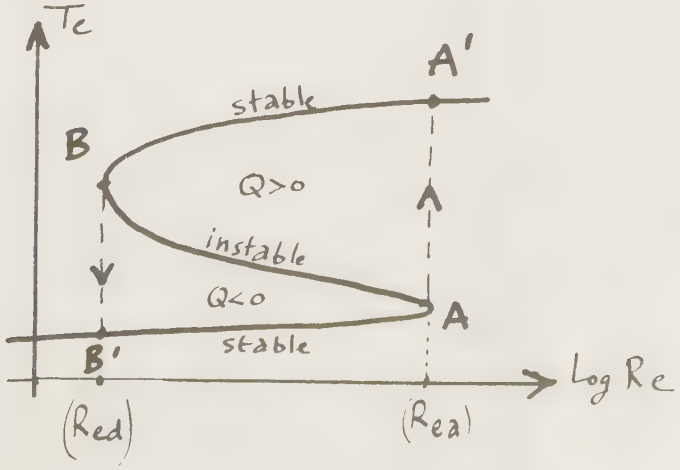


Figure V.11
Diagramme de stabilité

Il existe donc deux valeurs particulières R_{ea} et R_{ed} correspondant à l'amorçage et au décrochage du générateur.

Parcourons la caractéristique en faisant croitre progressivement la résistance de charge R_e :

T_e commence par croitre très lentement jusqu'au point A , puis, par suite de l'instabilité de régime,le point figuratif saute brutalement à A' ,avec une variation considérable de la température électronique.Il y a amorçage.

Si l'on accroit encore la résistance R_e le point continue de décrire la partie supérieure de la caractéristique,asymptote à une valeur T_e max (Configuration Faraday court-circuitée).

Diminuons maintenant la résistance.Le convertisseur va décrire la branche supérieure jusqu'en B (régime surcritique).Puis en B il y aura désamorçage brutal avec chute de la température électronique. C'est le décrochage du générateur.Le point figuratif passe en B' sur la partie inférieure de la caractéristique.

Reportons nous maintenant sur les courbes (P_E , η) données pour un même champ B mais pour des valeurs différentes de la température du gaz :

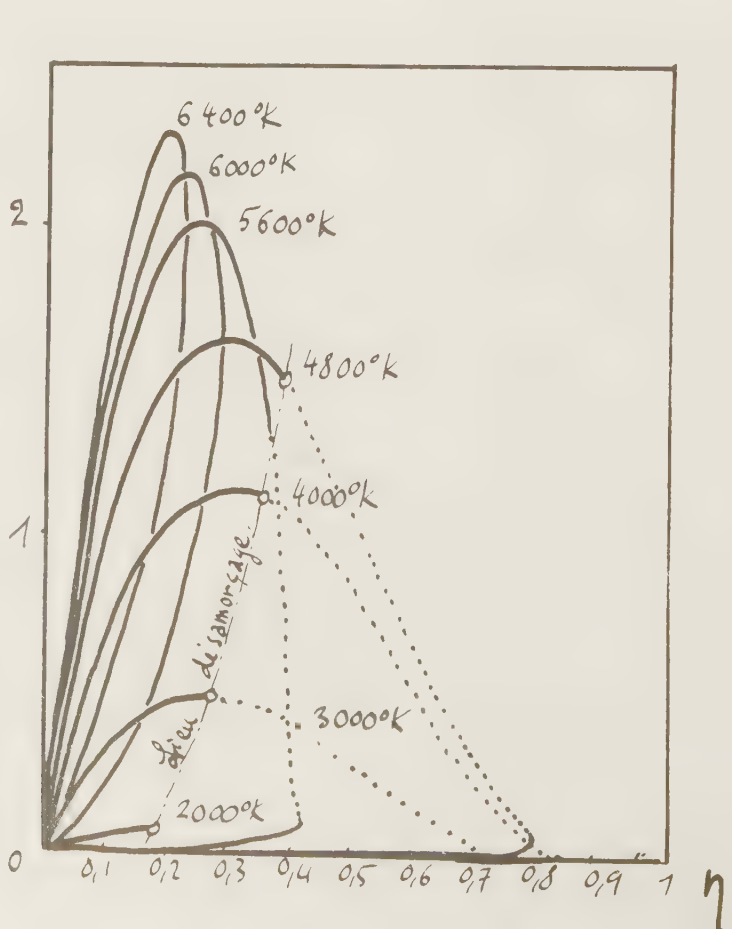


Figure V.12

Diagramme Puissance-Rendement 70% Hélium-30% Argon. Champ Magnétique 2 T Pression du gaz 1 bar. En pointillé les régimes de fonctionnt virtuels.

La limitation du rendement qui découle de ce mécanisme d'instabilité de régime est sévère : rendement inférieur à 20% pour T_g = 2000°K dans nos conditions de calcul.Il est à noter qu'on peut relever le rendement maximum en accroissant le champ B ,mais assez peu.

Si l'on désire faire fonctionner un générateur de Hall en situation surcritique il faut disposer en amont un préétage d'amorçage :

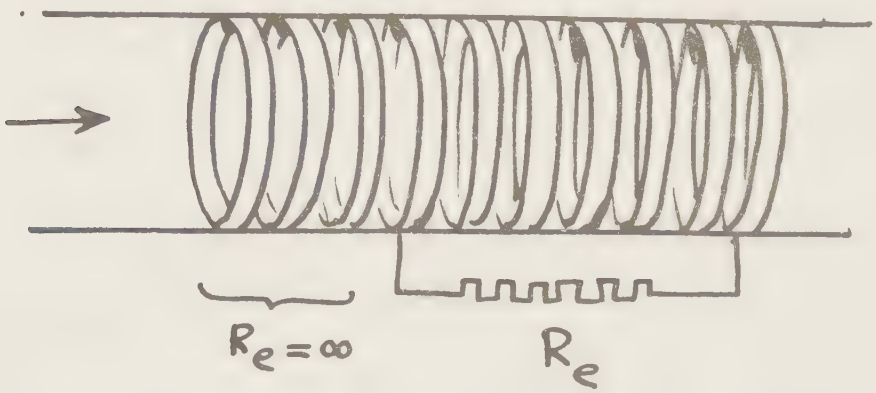


Fig.V.13 Générateur linéaire de Hall avec auto-amorçage.

en bas : même principe mais en configuration disque.Il y a bouclage du courant azimuthal dans le préétage d'amorçage.

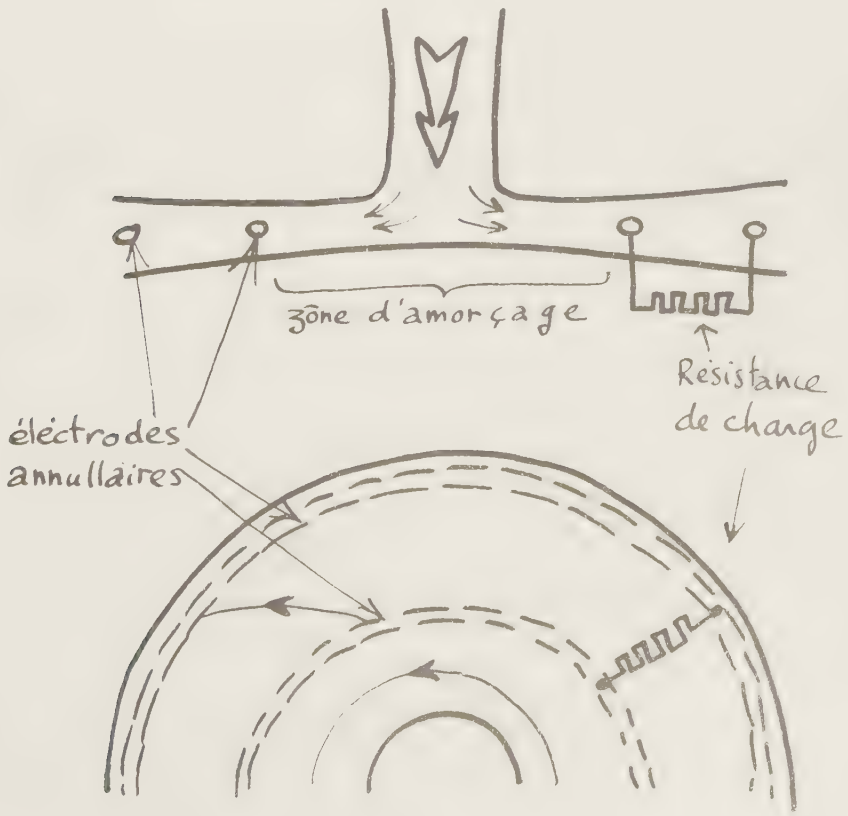


Figure V.14 Générateur disque avec auto-amorçage.

Ce phénomène d'instabilité de régime n'a jamais été constaté expérimentalement.Il y a en effet deux phénomènes qui peuvent masquer le fonctionnement d'un générateur de Hall hors équilibre : ce sont

— Le développement de l'instabilité électrothermique.

— Le court-circuitage interélectrodes.

Il a paru néanmoins intéressant de mettre en évidence par le calcul ce type nouveau d'intabilité,à laquelle s'attache une limitation importante du rendement électrique.

Ainsi l'exploitation de la formule Hall s'avère-t-elle d'emblée très problèmatique,en dépit des espoirs que l'on avait fondé sur celle-ci dans les débuts des expériences de conversion MHD .

BIBLIOGRAPHIE DE CETTE PREMIERE PARTIE DU CHAPITRE V .

[1] STEG.L & SUTTON G.W. : " The prospects of MHD Power generation " Astronautics,August 1960,pp.22-25,84,86.

[2] HURWITZ H.,KILB R. & SUTTON G.W. : " Influence of tensor conductivity on current distribution in a MHD generator." Journal of applied Physics 32.205-216 (1961).

[3] KERREBROCK J.L. : " Conduction in gases with elevated electron temperature " Proc.2nd Symp.Eng. Aspects of MHD pp.327-346 Columbia University Press,New York 1962.

[4] HURWITZ H.,SUTTON G.W. & TAMOR S. : " electron heating in power generation ".ARS JR 32.1237-1242 (1962).

[5] SUTTON G.W., HURWITZ H. & PORITZKY h. : " Electrical and end losses in a MHD channel due to end current loops ". Trans. AIEE Commun and electron,801/687-696. (1962)

[6] SUTTON G.W. : " End losses in MHD channels with tensor electrical conductivity and segmented electrodes." J.Appl.Physics 34 (1963)

[7] SHERMAN A. : " A high performance short time duration MHD generators systems." ARS Space power Conf.Preprint 2558-62 set.1962.

[8] SUTTON G.W. : " Preliminary experiments on MHD channel flow with slightly ionized gaz." Proc. Sympos. Electromagnetics and Fluid Dynamics of gazeous plasmas.pp.307-321.Polytechnic press,Brooklyn N.Y.(1962)

[9] ROSA R. : " Physical principle of MHD generation ". Phys of Fluids,4/182-189/ (1961.).

[10] MANNAL C. & MATHER N.W. : "Engineering aspacts of MHD". Proc. 2nd Symp. Columbia University Press,New York. 1962.

[11] COOMBE R.A. : " Magnetohydrodynamic generation of Power."Chapman and Hall Ldt. London 1964.

[12] ROBBEN F. : " Non equilibrium ionization in MHD generators." General Electric Res. Rept 1962.

[13] ZAUDERER B. : " Experimental study of non equilibrium ionization in MHD generators.AIAA Jr. Vol. 4 n°6 pp.701-707.

[14] ZETTWOOG P. : " Flow and non equilibrium ionization ".Round table rept.Conference de Salzbourg.

[15] SODHA M.S. & VARSHNI Y.P. : " Dependance of electron mobility on magnetic field in a fully ionized gas."Phys.Rev.Vol.114 n°4 p;946.

[16] KERREBROCK J.L. : " Segmented electrodes losses in MHD generators with non equilibrium ionization."AIAA Jr. Vol.4 n° 11 p.1938 (1965).

[17] ROSA R.J. : " Hall and ion slip effect in a non uniform gas." Phys.of Fluids Vol.n°5 Sept. 1962 p.1801.

[18] BEN DANIEL D.J. & BISHOP C.M. : " Non equilibrium ionization in a high pressure Cesium-Helium transient discharge." Phys of Fluids Vol.6 n°7 p. 300 (1963).

[19] KRUGER C.H. & MITCHNER M. : " Kinetic theory of two temperature plasmas".Physic of Fluids Sept.1967 Vol.10 n° 9 .

[20] AZALBERT J.P. & ZETWOOG P. : " Conditions d'emploi des tuyères disques en conversion MHD ". Symposium de Salzbourg.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

V.VI : INSTABILITE ELECTROTHERMIQUE :

Après ces calculs de performance de générateurs MHD fonctionnant hors équilibre nous allons passer au problème délicat de l'instabilité électrothermique.

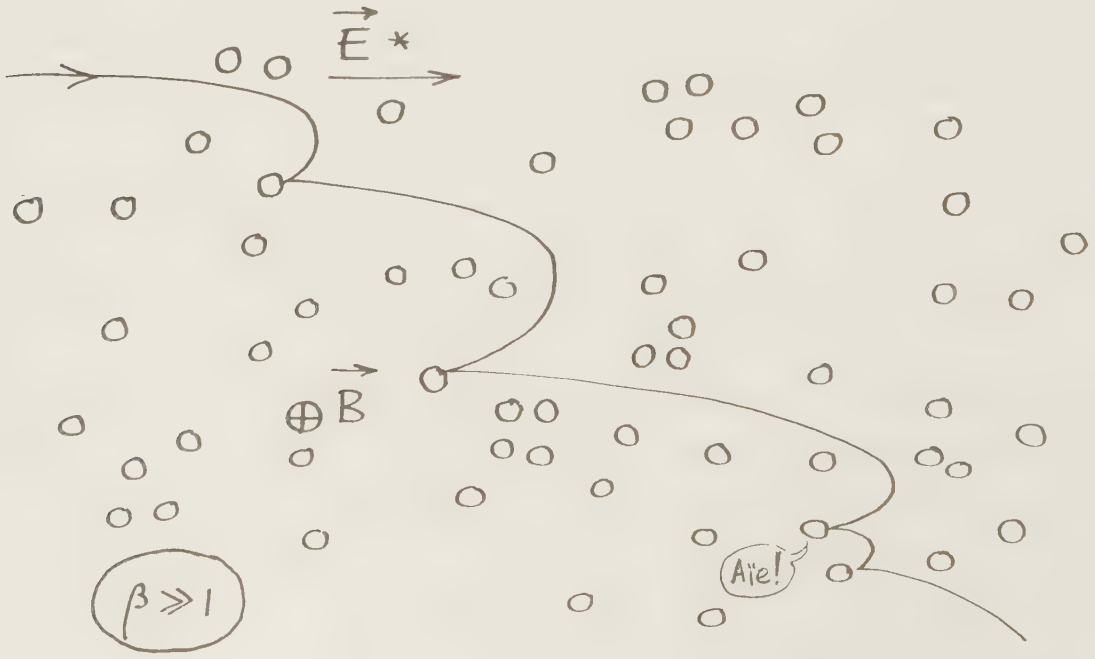
De quoi s'agit-il ?

Soit $\beta = \frac{eB}{m_e \nu_e}$ le paramètre de Hall. Celui-ci figure le rapport entre la gyro fréquence électronique associée au champ B et la fréquence ν_e de collision. Suivant la valeur de ce paramètre le mode de cheminement des électrons dans le plasma diffèrent :

Faible valeur du paramètre de Hall : Figure V.15

Figure V.16

Fortes valeurs du paramètre de Hall :



Nous avions supposé jusqu'ici la répartition de courant uniforme :

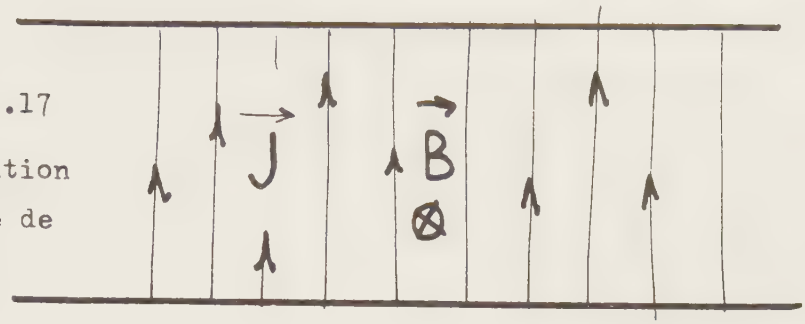


Figure V.17
Distribution uniforme de courant.

Si le paramètre de Hall dépasse une valeur critique β_{cr} et si $T_e > T_g$ Velikhov et Kerrebrock (Référence 2) ont montré qu'un mécanisme d'instabilité de nature électrothermique apparaissait.

Velikhov met clairement en évidence la perturbation qui en résulte sur le champ de courant à l'aide des simulations sur ordinateur qu'il a effectué :

Soit un δn_e introduit dans la masse du plasma, dans le volume de conversion .

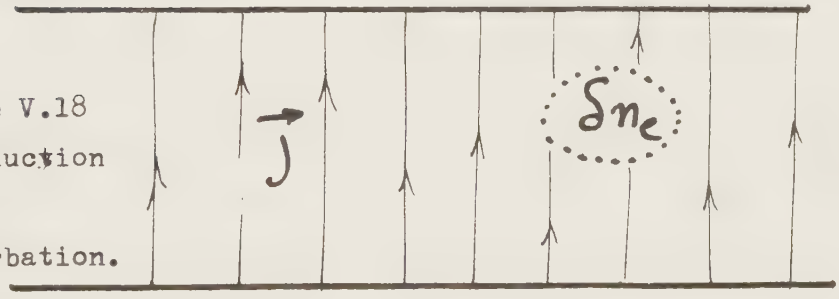
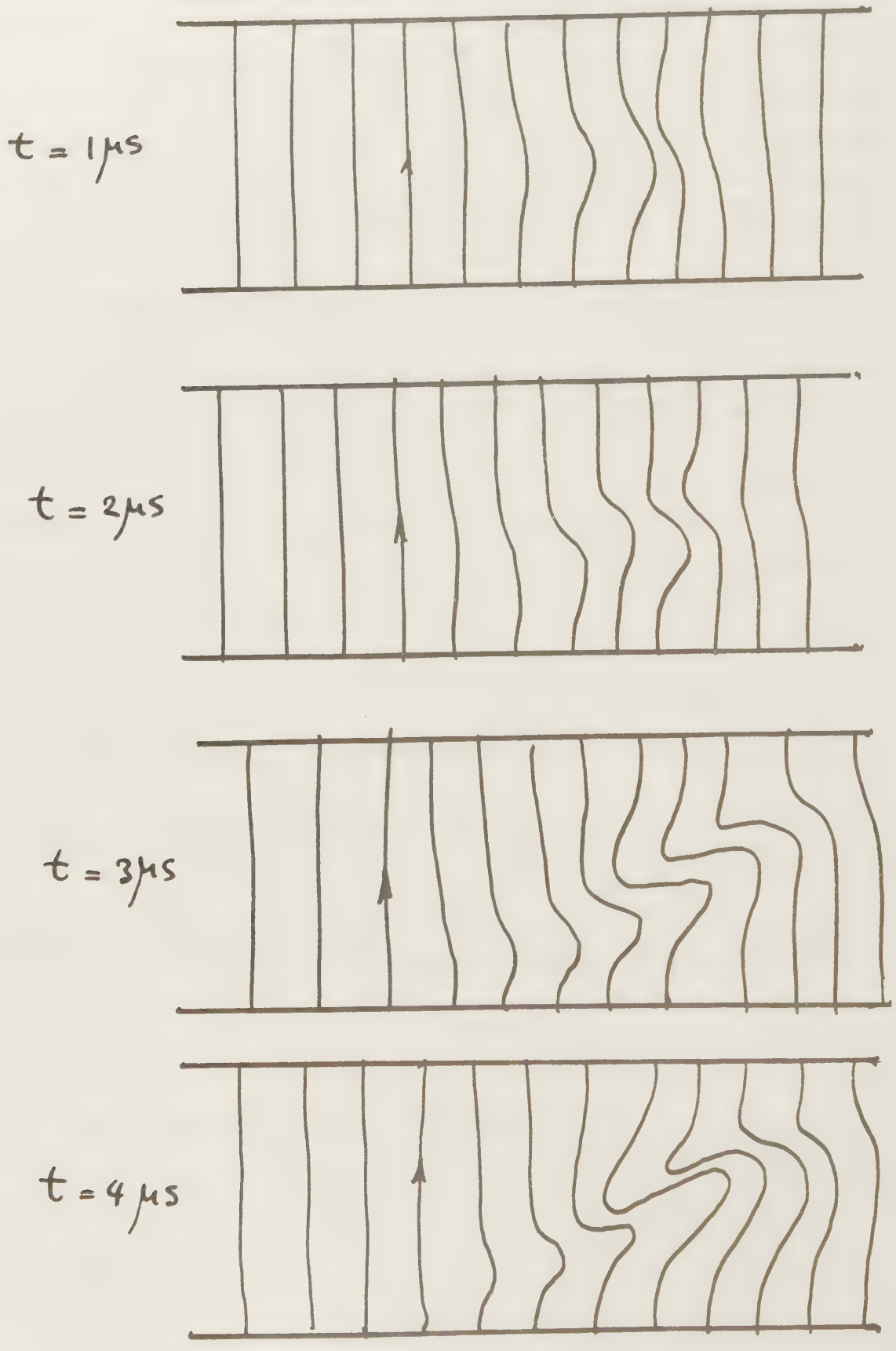


Figure V.18
Introduction d'une perturbation.

$t = 0$

Les conditions du calcul ne sont pas données. Ces figures ne sont indiquées ici que pour fixer les idées.

Figure V.19 à V.24 : développement de l'instabilité électrothermique.



Comme l'indique l'échelle de temps,le développement du mécanisme est excessivement rapide.Le temps de transit du plasma dans une tuyère étant de l'ordre de quelques centaines de microsecondes, on voit que le temps d'établissement de l'onde électrothermique est beaucoup plus bref.

Le pincement des lignes de courant que l'on peut voir est corrélatif d'un fort accroissement local de la densité de courant.Des photographies effectuées à l'aide de convertisseurs d'image ont montré la présence de stries,pratiquement figées dans le fluide. Celles-ci ont été observées en particulier par Belousov,Shipuk, Zauderer,Caressa etc...

Le schéma ci-après figure la densité électronique correspondant à la dernière image ci-dessus :

Figure V;25 shéma de la densité électronique.

Densité électronique shématique .

Nous nous sommes proposé ici de calculer les conditions locales où un tel mécanisme était susceptible de se développer.

Ce calcul a été effectué par Kerrebrock,Louis,Velikhov et Ricateau dans le cas où la mobilité électronique varie peu,c'est à dire essentiellement en régime non-coulombien:

$$\begin{cases} \sigma \simeq \mu_e e n_e \\ \mu \simeq cte \\ \sigma \sim n_e \end{cases}$$

La méthode de calcul variant beaucoup d'un auteur à l'autre nous avons pris comme base de départ de notre travail le développement de Ricateau (CEA),lequel avait opéré par méthode perturbationnelle.

Nous commencerons par rappeller brièvement son travail :

Soit $\vec{v_e}$ la vitesse électronique macroscopique.Si l'on néglige le rayonnement et la conduction de la chaleur dans le gaz d'électrons,l'équation de l'énergie peut s'écrire :

$$\left[\frac{d}{dt}(n_e u)\right]_{\vec{v_e}} = \frac{\sigma E^{*2}}{1+\beta^2} - 3 n_e m_e k (T_e - T_j) \sum_{j \neq e} \frac{\nu_{ej}}{m_j} - n_e u \nabla.\vec{v_e} - P_e \nabla.\vec{v_e}$$

où : $U = E_i + \frac{3}{2} k T_e$

avec E_i = énergie d'ionisation.

Si l'on suppose que les Ions sont animés de la même vitesse que les atomes du gaz porteur, le caractère conservatif du courant s'écrira :

$$\nabla . \left[n_e (\vec{v_e} - \vec{u}) \right] = \left[(\vec{v_e} - \vec{u}) . \nabla \right] n_e + n_e \nabla . \vec{v_e} = 0$$

si l'on pose : $Q = \frac{\sigma E^{*2}}{1+\beta^2} - 3 n_e m_e k (T_e - T_g) \sum_{j \neq e} \frac{\nu_{ej}}{m_j}$

L'équation de l'énergie devient :

$$n_e \left(\frac{dU}{dt} \right)_{\vec{v_\varphi}} + U \left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{u} - \frac{k T_e}{U} (\vec{v_e} - \vec{u}) \right) . \nabla \right] n_e = 0$$

C'est à dire : $U \left(\frac{dn_e}{dt} \right)_{\vec{v_\varphi}} = Q$

où $\vec{v_\varphi}$ est la vitesse de phase caractéristique donnée par :

$$\vec{v_\varphi} = \vec{u} - \frac{kT_e}{u}(\vec{v_e} - \vec{u}) = \vec{u} + \frac{kT_e}{u}\frac{\vec{j}}{en_e}$$

Nous allons examiner le second membre Q afin de savoir s'il y a croissance ou décroissance d'une perturbation initiale δn_e dans la direction de propagation.

Ici intervient la partie originale de ce travail :

Nous prendrons cette fois en charge les variations de la mobilité électronique μ et par suite du paramètre de Hall $\beta = \mu B$ en posant :

$$\frac{\delta\mu}{\mu} = -f\frac{\delta n_e}{n_e}$$

à l'état de régime nous aurons l'égalité suivante :

$$\frac{\sigma E^{*2}}{1+\beta^2} = 3 n_e m_e k (T_e - T_g) \sum_{j \neq e} \frac{\nu_{ej}}{m_j} = A$$

Ne prenant qu'une seule espèce j :

$$\delta Q = A\left[\frac{\delta E^{*2}}{E^{*2}} - \frac{\delta(T_e - T_g)}{T_e - T_g} - \frac{2f}{1+\beta^2}\frac{\delta n_e}{n_e}\right]$$

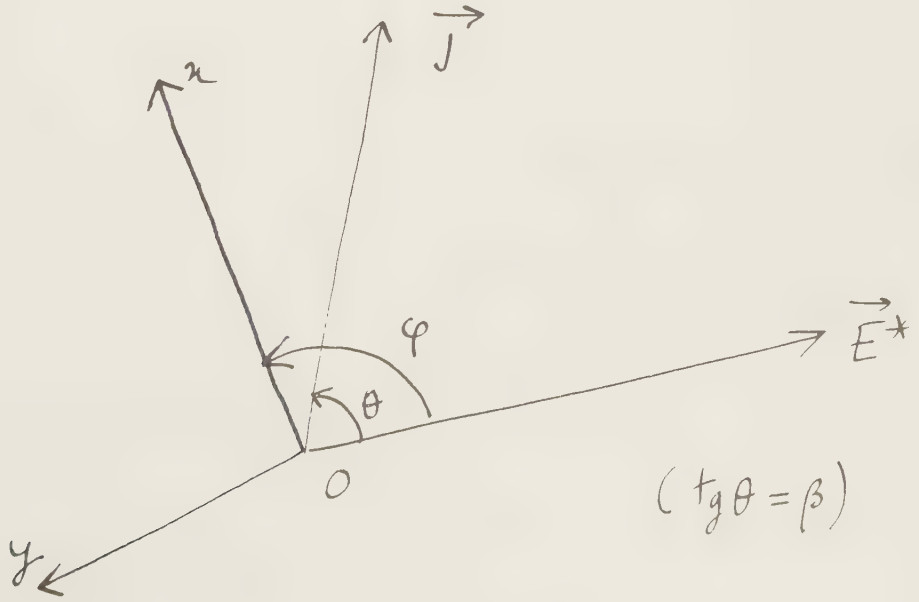
Différencions la loi de Saha :

$$\frac{\delta(T_e - T_g)}{T_e - T_g} = s\,\frac{\delta n_e}{n_e}$$

(Ceci revient à supposer que les fluctuations de densité et de température électronique sont en phase).

$$s = \frac{2kT_e^2}{E_i(T_e - T_g)} \times \frac{1}{1 + \frac{3}{2}\frac{kT_e}{E_i}}$$

Considérons une perturbation plane parrallèle à $\vec{B}$ et se déplaçant suivant une direction quelconque x. Appelons φ l'angle ($\vec{E}^*$, $\vec{ox}$).



$\vec{E}^*$ et $\vec{J}$ font entre eux l'angle de Hall et l'on a :

$$\vec{J} = \sigma \begin{Vmatrix} \frac{1}{1+\beta^2} & \frac{\beta}{1+\beta^2} \\ \frac{-\beta}{1+\beta^2} & \frac{1}{1+\beta^2} \end{Vmatrix} \vec{E}^*$$

Si B et u ne sont pas perturbés (ce qui signifie que le phénomène n'est pas de nature magnétoacoustique) on aura :

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E}^* = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = 0 \end{cases}$$

Ce qui entraine :

$$\begin{cases} E^*_y = cte \\ J_x = cte \end{cases}$$

La loi d'Ohm s'écrira :

$$E^*_x = \beta E^*_y + \frac{1+\beta^2}{\sigma} J_x$$

En tenant compte de ce que :

$$E_x^* = E^* \cos\varphi$$

$$J_x = \sigma E^* \cos\theta \cos(\varphi - \theta)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

Il vient aisément :

$$\frac{1}{U}\frac{\delta Q}{\delta n_e} = \frac{-\sigma E^{*2}}{U n_e \sqrt{1+\beta^2}} \left[\cos(2\varphi-\theta) + \frac{1+s}{\sqrt{1+\beta^2}} + \xi f \right]$$

où : $$\xi = \cos\theta \left(1 - \cos(2\varphi - \theta)\right)$$

ξ étant toujours positif on démontre ainsi que les collisions coulombiennes ont toujours un effet <u>stabilisant</u>.

Posons:

$$H = \cos(2\varphi - \theta) + f \cos\theta \left[1 - \cos(2\varphi - \theta)\right]$$

Les plans d'onde critique seront obtenus pour H minimum, c'est à dire pour :

$$(1+\beta^2)\left[H\sqrt{1+\beta^2} - f\right] = \left[(1-f) + \beta^2(1+f)\right]\cos 2\varphi$$

$$+ \beta\left(-1+\beta^2 - 2f\right)\sin 2\varphi$$

Posons :

$$(1-f) + \beta^2(1+f) = a$$

$$\beta\left(-1+\beta^2 - 2f\right) = b \qquad \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\psi$$

La condition $\sqrt{a^2+b^2}\,\cos(2\varphi - \psi)$ minimum donne les plans d'onde, c'est à dire :

$$\varphi_{cr} = \frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

avec :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\beta\left(1+\beta^2-2f\right)}{(1-f)+\beta^2(1+f)}$$

Or : alors :

$$H = \frac{f}{\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{(1+\beta^2)^{3/2}}$$

Où :

$$\sqrt{a^2+b^2} =$$

$$\sqrt{\beta^6 + \beta^4\left(2 + (1-f)^2\right) + \beta^2\left(1 + 2(1-f)^2\right) + (1-f)^2}$$

Soit g le taux de croissance de la perturbation :

$$g = \frac{\sigma E^{*2}}{n_e U (1+\beta^2)} \left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{1+\beta^2} - (1+f) - s \right]$$

Posons :

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{1+\beta^2} - (1+f)$$

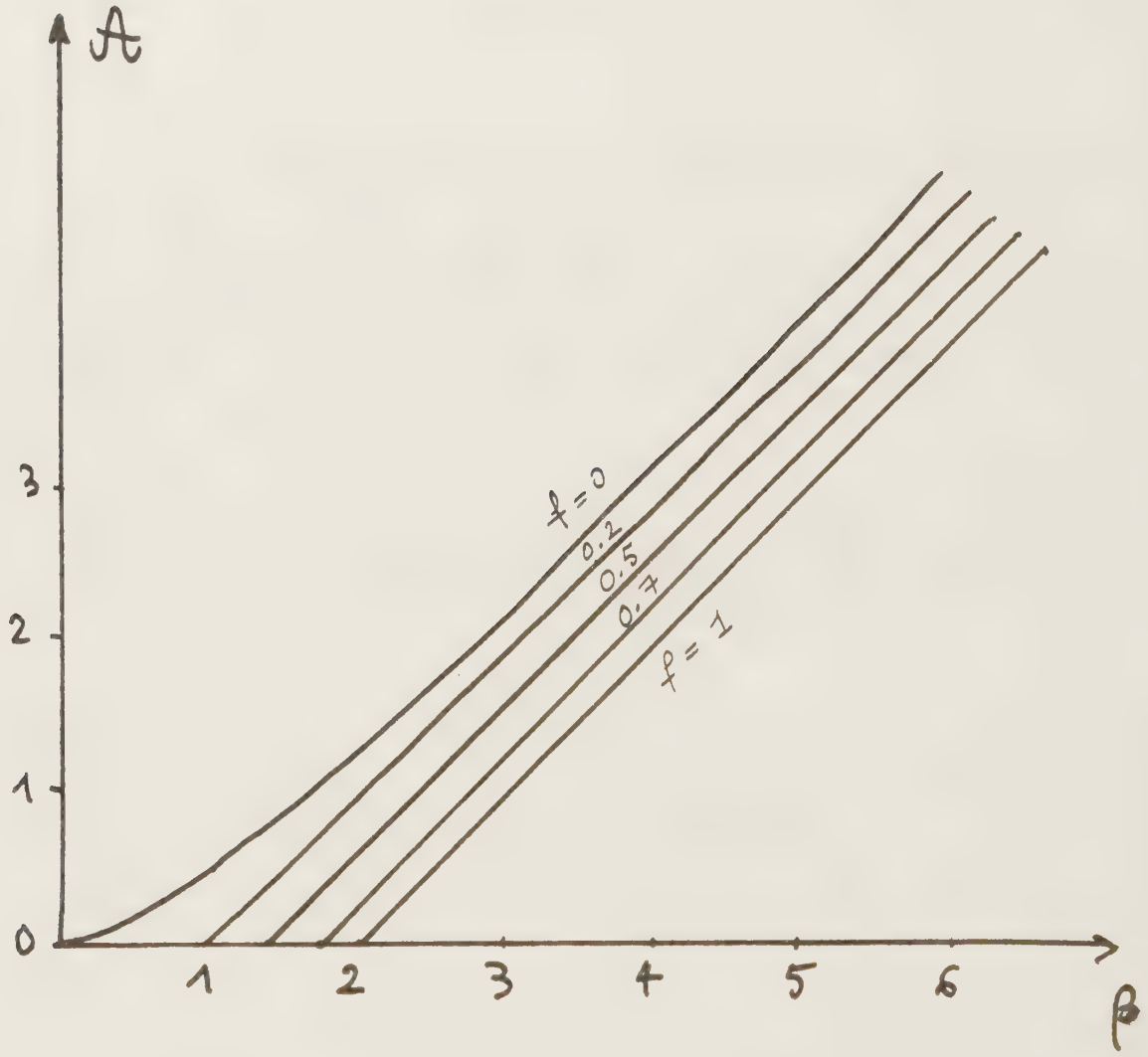
Il vient :

$$g = \frac{\sigma E^{*2}}{n_e U (1+\beta^2)} \left[\mathcal{A} - s \right]$$

Le passage en situation instable ($g > 0$) s'effectuant évidement lorsque : $\mathcal{A} = s$

La valeur du paramètre de Hall critique est celle qui satisfait la dernière équation. Traçons le diagrame $A(\beta, f)$

Figure V.26 : Abaque donnant A



Si on se limite au cas où $f \geqslant 0{,}2$ A obeit assez bien à la formule semi empirique :

$$A \simeq \beta - 1{,}935\, f - 0{,}065$$

Ce qui entraine aussitôt :

$$\beta_{cr} = 1,935\, f + 0,065 + \Delta$$

et :

$$g = \frac{\sigma E^{*2}}{n_e U (1+\beta^2)} (\beta - \beta_{cr})$$

Expressions très maniables.

En régime Coulombien :

$$\langle Q_{ei} \rangle \sim \frac{1}{T_e^2} \qquad \langle c_e \rangle \sim \sqrt{T_e}$$

$$f = 1 - \frac{3}{2} \frac{dT_e/T_e}{dn_e/n_e} = \frac{-1 - \frac{3}{2}\frac{kT_e}{E_i}}{-1 + \frac{3}{2}\frac{kT_e}{E_i}}$$

$$\frac{kT_e}{E_i} \ll 1 \Rightarrow f \simeq 1$$

Il vient ainsi :

$$\beta_{cr} \simeq 2 + \frac{2kT_e^2}{E_i (T_e - T_g)} = 2 + \Delta$$

Résultat conforme à celui de Solbès. [4]

En régime coulombien (plasma faiblement ionisé) notre formule devient :

$$\beta_{cr} = \left(\Lambda^2 + 2\Lambda \right)^{1/2}$$

et l'on retrouve le résultat de Ricateau.

REMARQUE : Si le modèle proposé ici correspond à la réalité on voit que cela condamne la formule "Hall".En effet celle-ci ne donne des rendements appréciables que lorsque le paramètre de Hall est important.Or dans les cas usuels celui-ci plafonne aux alentours de la valeur 2 .

Dans une application de calcul nous calculons le paramètre de Hall critique dans l'argon pur,p = 1 bar , T_g = 3000°K :

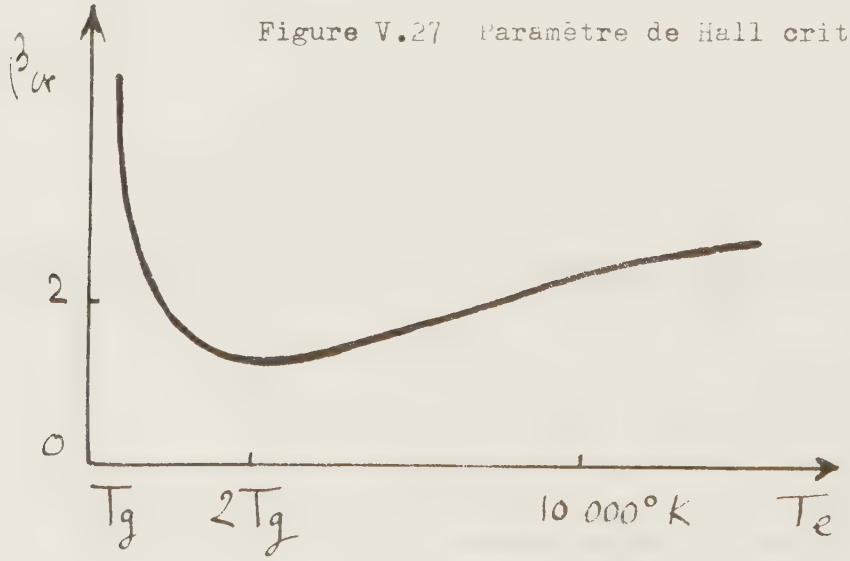


Figure V.27 Paramètre de Hall critique.

La planche suivante permet,par la donnée de f et de béta,de situer les plans d'onde.

Figure V.28
détermination des plans d'onde critiques.

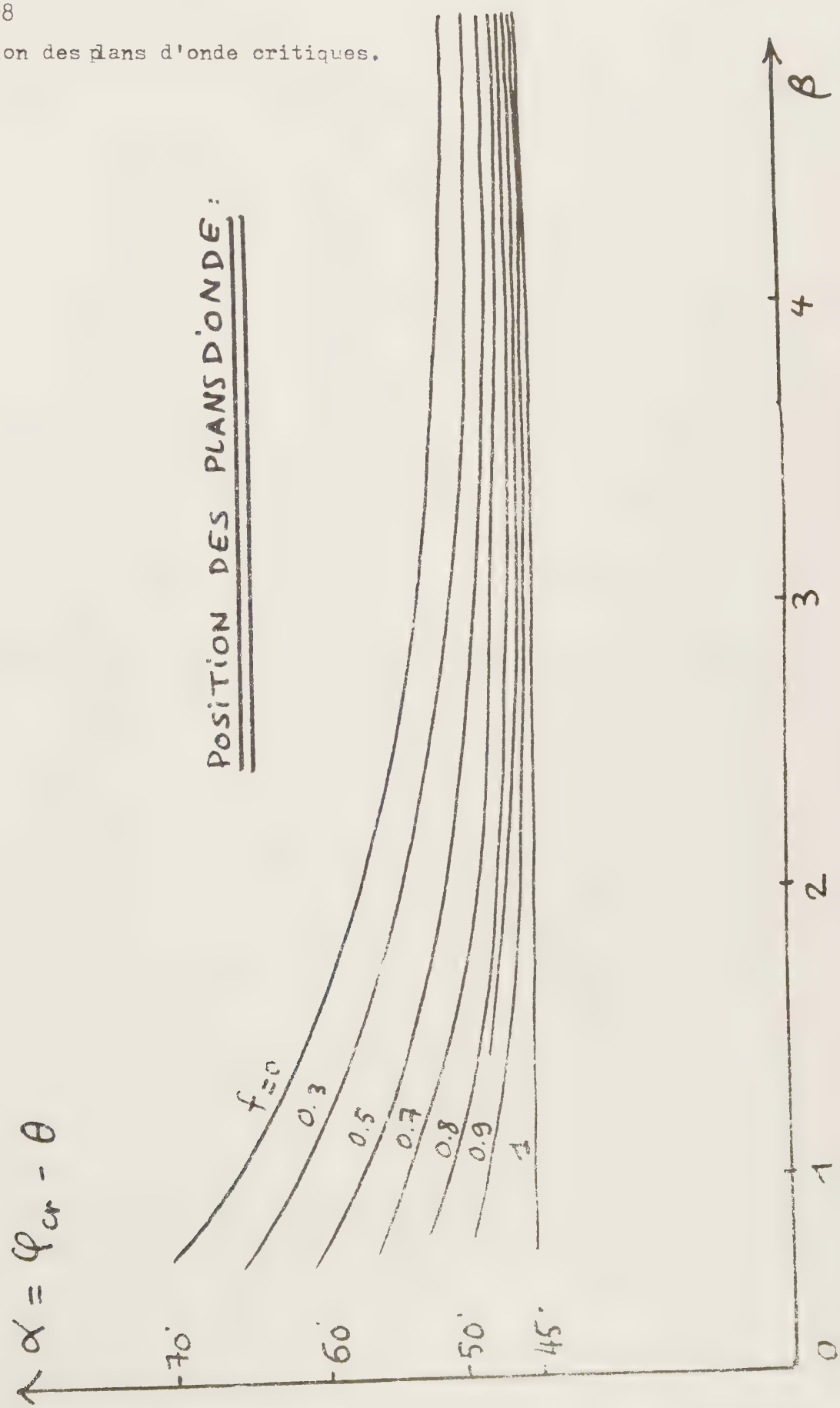
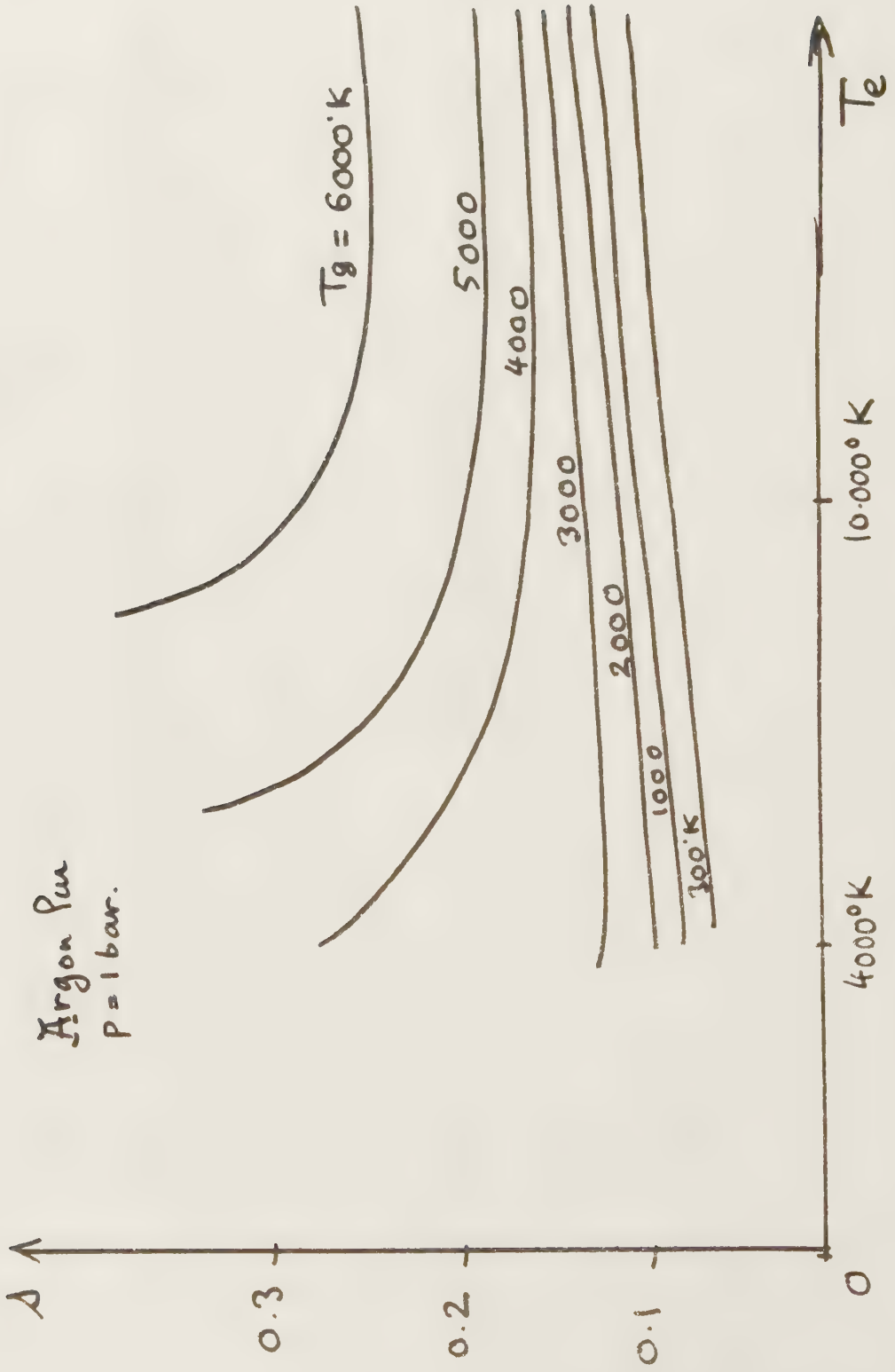


figure V.28 : Valeurs du paramètres s .



Traçons maintenant la courbe du taux de croissance :

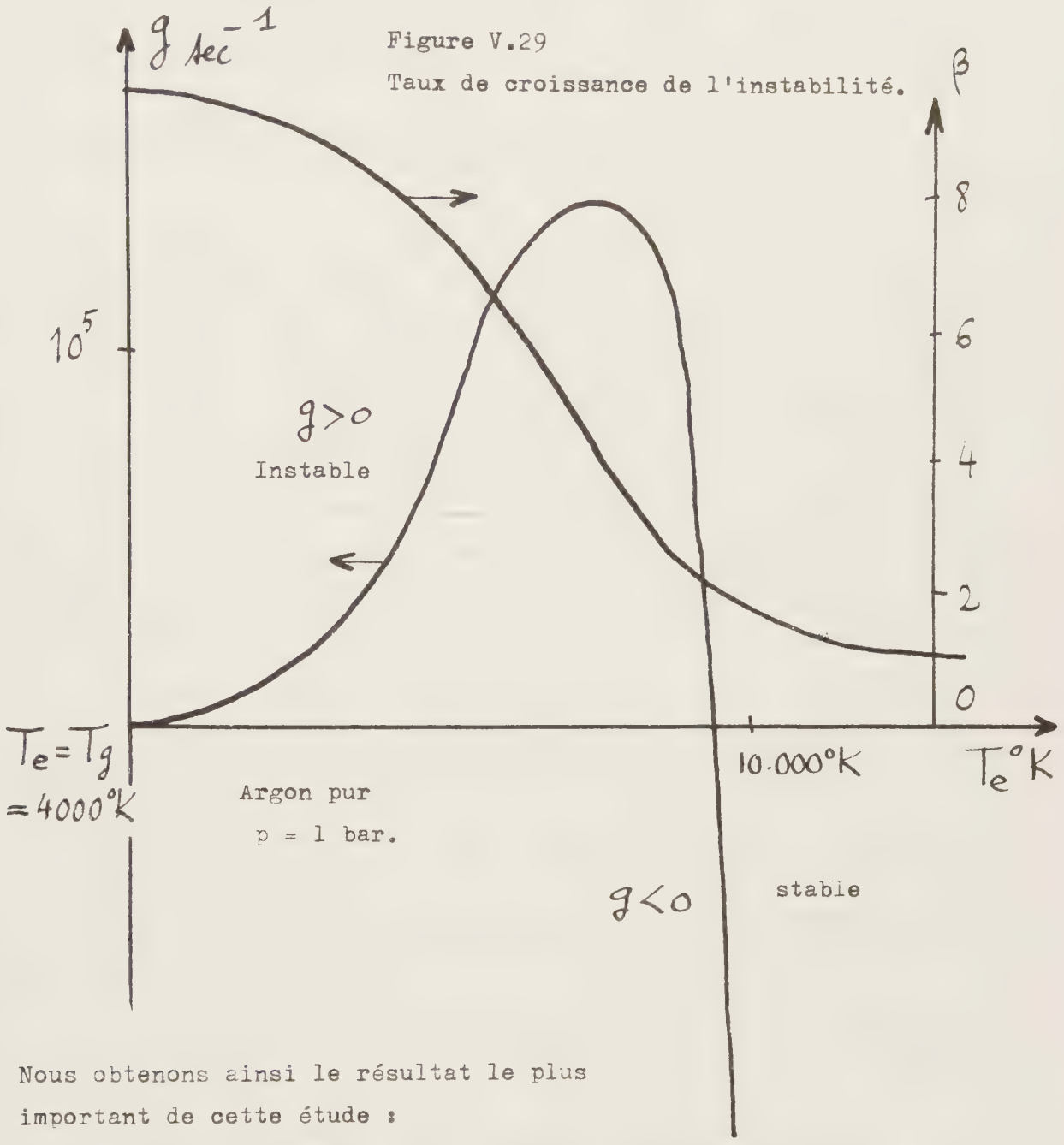


Figure V.29
Taux de croissance de l'instabilité.

Nous obtenons ainsi le résultat le plus important de cette étude :

Il existe une zone de stabilité aux fortes températures électroniques.La stabilité est donnée par les collisions coulombiennes qui font chuter le paramètre de Hall en dessous de la valeur critique.

Nous avions,au Colloque International de MHD de Varsovie, dévrloppé précisément cette idée,en 1967.

Si en effet la vitesse d'ionisation est très grande,ou si l'on effectue en amont du convertisseur une préionisation ad hoc,le milieu peut se trouver ainsi stabilisé par le mécanisme d'ionisation lui-même.

Ceci peut-il avoir un intérêt sur le plan de la conversion de l'énergie ?

Tel que il semble que non.En admettant que l'on puisse obtenir effectivement un plasma électrothermiquement stable,à forte température électronique,cela impliquerait un fonctionnement très proche du court-circuit,donc sans intérêt pratique (extraction de puissance insignifiante,chocs MHD).

Il apparait de plus que la susceptibilité du plasma à l'instabilité s'accroit lorsqu'on cherche à diminuer la température du gaz.En conservant la configuration du court-circuit la recherche de cette stabilisation par les collisions coulombiennes implique vite le recours à des champs magnétiques tout à fait prohibitifs.

CONCLUSION :

Au colloque de Varsovie,Ricateau disait que ceux qui avaient tenté de recourir à l'ionisation hors d'équilibre pour améliorer leurs expériences de conversion s'étaient heurtés " au mur des instabilités ".De fait la conversion MHD a bien du mal à n'être pour le moment plus qu'une curiosité de laboratoire.

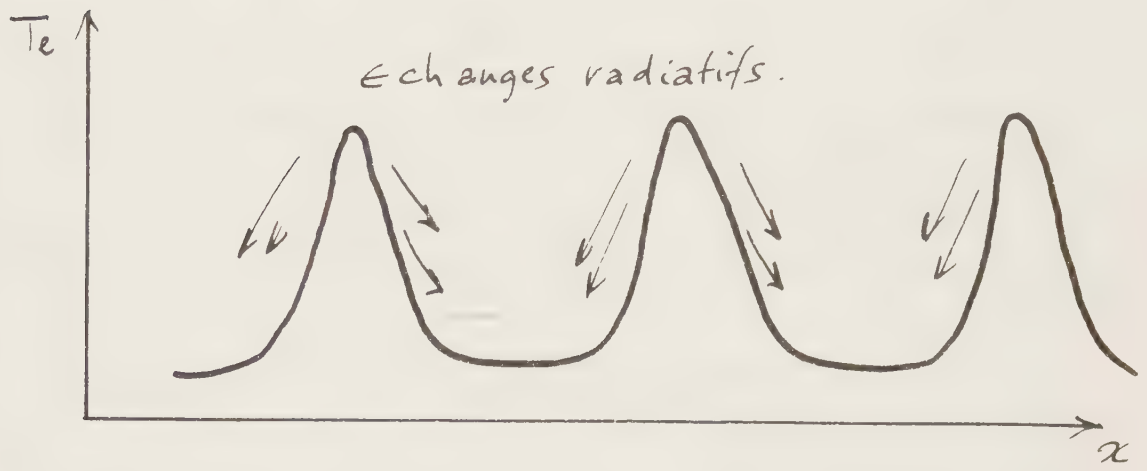
L'obstacle des instabilités est-il franchissable ?
Il importe tout d'abord de rechercher des fonctionnements à des valeurs limitées du paramètre de Hall,de l'ordre de deux.Ceci consacre l'abandon d'une formule " Hall ".

Il faudrait ensuite relever la valeur du paramètre de Hall critique,en jouant sur les processus dissipatifs.Le transfert de chaleur dans le gaz d'éléctrons assure déja un damping naturel, qui a été évalué par Nelson (1969).

Solbès a suggéré le recours à un couplage radiatif : supposons que l'on puisse adjoindre à l'ensemble gaz porteur + semence un troisième élément (suffisement discret par ailleurs) tel que

la longueur de réabsorbtion du rayonnement soit voisine de la demi-longueur d'onde de l'instabilité (qui se trouve être d'ailleurs pratiquement la largeur de la tuyère MHD).

Figure V.30 :
Distribution schématique de la température électronique :



Sur le plan expérimental il apparaitrait intéressant de tenter la conversion immédiatement en aval du col d'une tuyère de détente,ceci pour plusieurs raisons :

a) la plus forte température au col rend cet emplacement propice à une préionisation.

b) la détente serait susceptible d'entrainer un figeage appréciable de la densité électronique.

c) Le gradient de pression permettrait de travailler avec de plus forts paramètres d'interaction sans risquer l'apparition d'un choc MHD.

REMARQUE :

Dans un autre ordre d'idée il ne serait pas exclu d'espérer produire des inversions de populations.ceci servant de point de départ à l'étude de lasers MHD.

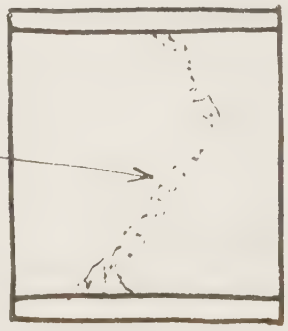
Tout ceci n'est pas sans présenter de nombreux écueils:

On sait par exemple qu'il est très difficile de produire une préionisation suffisement homogène et de longue durée en amont d'un convertisseur,capable d'assurer son amorçage.Il est en effet nécéssaire d'opérer hors du champ magnétique inducteur (sous peine de voir la décharge préionisante devenir elle-même sensible à l'instabilité électrothermique !).

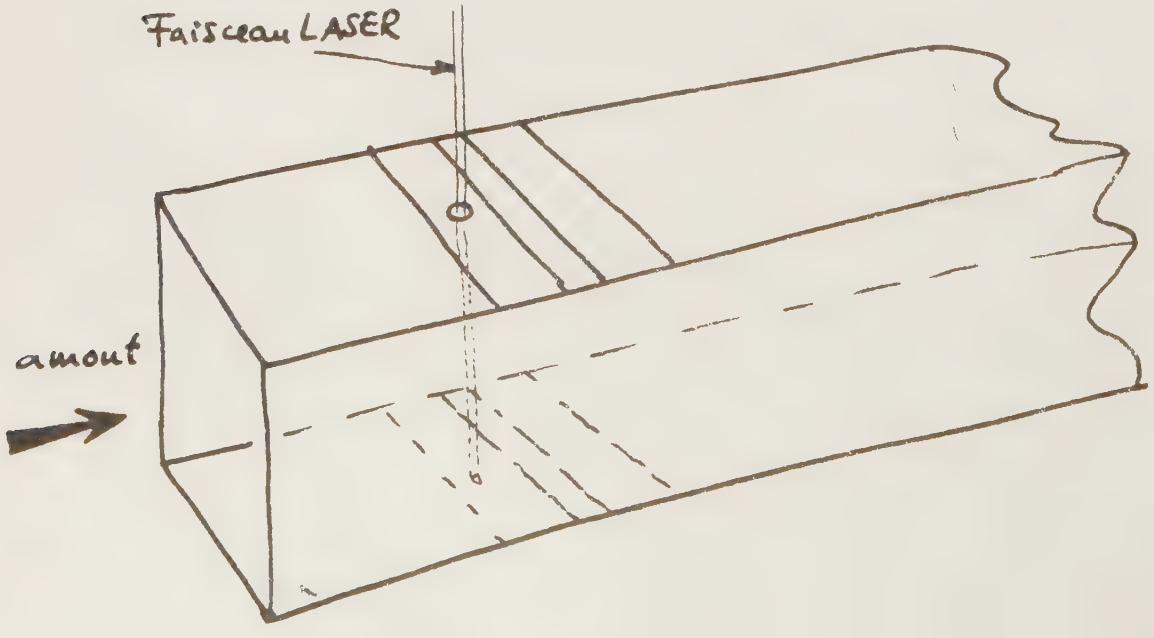
Une idée nous vient en tête :

Ne pourrait-on alors effectuer cette préionisation par un moyen autre qu'une décharge ?

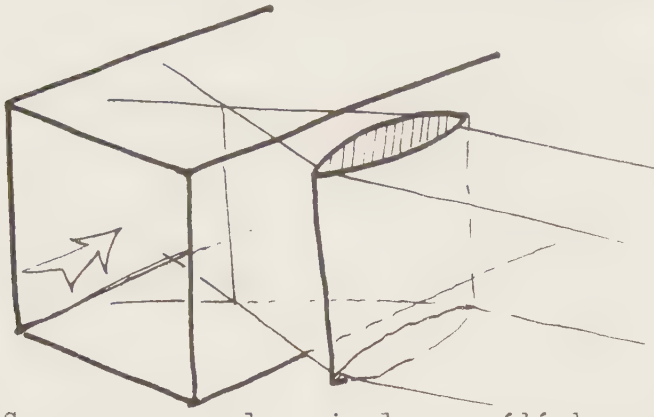
Zauderer a montré que la conduction du courant entre deux électrodes s'effectuait suivant un arc instationnaire :



Si l'on pouvait créer entre les deux électrodes une colonne de gaz ionisé permettait l'initiation de l'arc,l'amorçage serait ainsi assuré.Ce qui suggère aussitôt l'emploi d'une décharge LASER :



Second montage, suggéré par le professeur J.P.David :



Ici la focalisation de l'énergie du Laser est assurée par une lentille cylindrique.

Comme on a pu le voir le procédé de conversion directe de l'énergie est exessivement complexe. Nous avons tenté ici d'apporter quelque lumière sur certains aspects particuliers du fonctionnement des convertisseurs utilisant l'ionisation hors d'équilibre.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE DE CETTE DEUXIEME PARTIE DU CHAPITRE V

1) P.RICATEAU : " La conversion MHD en cycle fermé "
Revue de l'IFP Juil. Août 1967 XXII n°7,8 pp 1213-1216.

2) E.VELIKHOV : " Hall Instability of current carrying slightly ionized plasma " MHD Electr.Power Gen. Newcastle 1962 p.135.

3) BELOUSOV ELISEEV & SHIPUK : "Instabilité d'ionisation et conductivité en régime turbulent d'un plasma hors d'équilibre ".
AIEE Symp. Intern.Salzbourg 1966 p.323.

4) A.SOLBES : " Etude des inhomogénéités planes dans un plasma de conversion MHD-Instabilités électroniques. PA Ign/RT Saclay 8 Setembre 1966.

5) A.SOLBES : " A quasi linear plane wave study of electrothermal instabilities-Colloque International sur la production MHD d'électricité.Varsovie 1968. SM/107/26.

6) M.G.HAINES & A.H.NELSON : "Analysis of the growth and nature of electrothermal waves ".10 th Symp. on Eng. Aspects of MHD-MIT Cambridge

7) A.V.NEDOSPASOV : "Striations" Usp.Fiz. Nauk.94 (March 1968).(1969

8) DRUYVESTEYN & PENNING : Rev. of modern Physic 12-2 (1940).

9) V.S.GOLUBEV,G.A.KASABOV & G.A.KONATH :
Teplofiz.vysokikh temperatur (high temperature physics) 2,493-(1964).

10) G.BREDERLOW & R.HOGSON : "The electrical conductivity in Argon-Cesium,Argon-Potassium and Helium-Potassium plasmas with elevated electron temperature in crossed electric and magnetic flields".Institut für plasma physik,Graching bei München.Rept. IPP 3/59.Sept 1967.

11) J.L.LOUIS : " Studies on an inert gas disk Hall generator driven in a shock tunnel".AVCO Everett Res.Rept. n°267 Feb. 1967.

12) E.VELIKHOV & A.M.DYKHINE : "Plasma turbulence due to the ionization instability in a strong magnetic field". Proc.of the sixth. international Symp.on ionization phenomena.Paris July 64.

13) A.V.NEDOSPASOV : "Speed of ionisation waves in lox-temperature plasmas".Proc.Intern.Symp. MHD Salzbourg 1966 paper SN/74/97

14) KLEIPEIS & ROSA : "Experimental stidies of strong Hall effect and V X B induced ionization".AVCO Everett Lab. Res. Rept. 177 September 1964.

15) B.ZAUDERER :"Discharge structure of a linear,non equilibrium MHD Channel"Gen.Elec.Res.Rept. 1967.

16) B.ZAUDERER : Gen.Electric Co TIS n° R67SD6 (1967).

17) B.ZAUDERER : Proceedings of the international Symposium on MHD Electic Power Generation.Salzburg.July 1966 p.159.

18) B.ZAUDERER : "Effect governing magnetically induced oinization". 2nd Symp.Intern. on MHD Vol.1 Paris 1964 pp.439-452.

19) YASUO MORI,HARUO KAWADA & KAZUTAKE IMANI : A shock tube study of a non equilibrium MHD Power generation.Salzbourg 1966.

20) KERREBROCK J.L.:
Conduction in gases with elevated electron temperature.
-:-
Proc.2nd Symp. Eng. Aspects of MHD pp.327-246,Columbia University Press,1962.

VI : CONCLUSION

" l'important c'est la rose .... "

Il semble nécéssaire de tirer une conclusion par chapitres :

Chapitre I :

Une solution analytique,basée sur un développement de la fonction de distribution électronique en puissance du rapport de la fréquence de collision électron électrons à la fréquence de collision électron-neutres apporte une simplification vis à vis de la méthode Chapman-Enskog,et effectue un raccord entre le travail de Spitzer et Härm et la solution Lorentzienne.

L'approximation de Lorentz apparait alors comme un chainon, dans un processus général basé sur un système résolvant itératif.

Lorsque la loi $\frac{1}{\nu}$ peut être mise sous la forme polynômiale un calcul numérique des intégrales collisionnelles est effectué, conduisant à des abaques d'emploi très simple.

Une seconde solution,basée sur l'opérateur de Bnatnagar,Gross et Krook,conduit à une expression analytique de la conductivité électrique scalaire.L'application de calcul,effectuée dans le cas de l'Argon fournit des résultats très proches de ceux obtenus par Devoto.

CHAPITRE II :

L'étude de l'instabilité gravitationnelle est effectuée à l'aide de la théorie cinétique.L'étude linéaire conduit à l'équation de Jeans.Une étude non-linéaire est effectuée.Dans les deux cas le lien avec la loi de Hubble est mis en évidence.L'examen des résultats suggère l'extension de la théorie dans le câdre de la relativité générale à travers l'équation de Boltzmann généralisée.

CHAPITRE III :

Il apparait donc possible d'expliciter des solutions de Schwarschild tridimensionnelles et instationnaires en particularisant l'ellipsoïde des vitesses.L'exploitation numérique des résultats obtenus est à faire, en particulier pour le cas des amas globulaires instationnaires.

Dans le cas des galaxies on note le bon accord des lois de rotation avec les résultats d'observation disponibles.Une étude ou la galaxie serait considérée comme un mélange binaire de deux populations d'étoiles conduirait certainement à des résultats intéressants,en particulier à des lois de vitesse plus variées,donc plus susceptibles de rendre compte de la réalité.

Dans un autre ordre d'idée on se propose de particulariser l'ellipsoïde des vitesses (déviation périodique du vertex)pour tenter de rendre compte de la structure spirale stellaire.

CHAPITRE IV :

En dépit de la difficulté de justifier pleinement l'hypothèse maxwellienne du départ,les conclusions de cette étude,bien que qualitatives,semblent ouvrir une voie intéressante.La structure des galaxies barrées et des galaxies du type ϕ s'y trouve en particulier expliquée.

En tout état de cause une analyse non-linéaire est à faire, seule capable de permettre une confrontation valable avec l'observatiion.

CHAPITRE V :

Après un bref rappel des problèmes qui s'attachent à la conversion MHD hors équilibre,le calcul des performances théoriques des générateurs fait apparaitre un phénomène d'amorçage et,dans le cas du générateur de Hall,une instabilité de régime apportant une limitation sévère à son emploi.

L'étude de l'instabilité électrothermique,le calcul des conditions critiques et du taux de croissance montre qu'un fonctionnement coulombien stable du générateur de Faraday,évidement à faible charge, est envisageable.

Ce calcul vient appuyer l'idée développée par nous au colloque de Varsovie en 1967.

Des solutions techniques sont proposées pour la préionisation et l'amorçage du générateur.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

REMERCIEMENTS

Je remercie MM. les professeurs A.Lichnérowicz et E.Schatzman pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mon travail et le soutien moral qui en a résulté.

Je remercie tout spécialement Mr R.Brun,devenu mon directeur de recherche,d'avoir été dès le début de mon activité de chercheur un interlocuteur sympathique,perspicace et encourageant.

Je remercie également Mr le professeur H.Guénoche pour l'aide apportée dans un moment difficile.

Je remercie MM. E.Fontana,D'Ancona père et fils,Bocci,J.Fuseri, G.Molinard,G.Soleillant et Mme A.M.Bachasson pour l'aide technique qu'ils m'ont apporté lorsque j'ai débuté dans la recherche,ainsi que Madame Fauchas,qui a pris en charge les calculs machine.

Je remercie le personnel de l'Observatoire de Marseille et particulièrement les membres du service d'interférométrie : MM. G.Courtès,Monnet,Georgelin,Boulesteix et Louise pour leur accueil sympathique et les nombreuses informations en provenance directe des galaxies,sans lesquelles je n'aurais jamais pu écrire les chapitres III et IV de ma thèse.

Je remercie enfin ma femme,à qui cette thèse est dédiée,et qui a accepté pendant des années d'être tenue au courant au jour le jour des développements de mes recherches,en faisant si bien semblant de comprendre.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Vu et permis
d'imprimer. Marseille
Le 2.2.72.
Le Président: F.BOREL